BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Szabó Gábor – Szüts István

MATEMATIKAI STATISZTIKA

PÉLDATÁR

I.

1. melléklet

27-129. oldalig Szüts István,
11-26, 130-181. oldalig Szabó Gábor
munkája

KÉZIRAT

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1973

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Szabó Gábor – Szüts István

MATEMATIKAI STATISZTIKA

PÉLDATÁR

I.

KÉZIRAT
Javított kiadás
2. változatlan utánnyomása

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1973

A kiadásért felelős:
a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karának dékánja
Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Villányi Zsuzsa
Megrendelve: 1973. április. Megjelent: 1973. május. Példányszám: 230
Készült: Rotaprint lemezről (kicsinyitéssel), a MSZ 5601-59
és MSZ 5602-55 szabványok szerint,
17,2 (A/5) iv terjedelemben, 49 ábrával

T 73-598 – DABASI NYOMDA

ELŐSZÓ

A matematikai statisztika egyike a matematika azon ágainak, amely az utóbbi években jelentős fejlődésen ment keresztül. A fejlődést elsősorban nem az elméleti összefüggések, ismeretek növekedése jelzi, hanem a tudományszak iránti egyre növekvő gyakorlati igények.

A matematikai statisztikára az elméleti kutatástól a termelésirányitásig, a piackutatástól az értékesitésig ugyszólván minden vezetői, szervezői munkaterületen szükség van, s a valóban korszerü gazdasági mérnöki tevékenység napjainkban már nehezen képzelhető el a matematikai statisztikai szemléletmód és módszerek ismerete nélkül. Ezen tulmenően nyugodtan állithatjuk – és az elmult két év bizonyitotta is –, hogy hazánkban a gazdasági memechanizmus reformja egyre fokozódó módszertani igényeket támaszt népgazdasági, vállalati és üzemi problémák megoldása kapcsán e tudományterület iránt, minőségi és mennyiségi szempontból egyaránt nagyobb döntési feladatok elé állitja az iparági és vállalati vezetőket. A szükséges, nagy mennyiségü információ beszerzése, feldolgozása és értékelése a matematikai statisztika módszereivel igen hatékonyan oldható meg. Megköveteli e módszerek ismeretét és alkalmazását az adatfeldolgozó és számitógépek nagymértékü elterjedése is.

A gazdasági mérnök szak matematikai statisztikai oktatásában 1965 óta szerzett tapasztalatok (ekkor jelent meg dr. Kindler József adjunktus első, átfogó és gyakorlati beállitottságu jegyzete) azt mutatták, hogy – a szemléletmód és a módszerek matematikai nehézségei miatt a tananyag hatékony elsajátitása nagy problémákat okozott a gazdasági mérnök hallgatóknak.

Ugyanakkor az elméleti (de nem teljesen formális kifejtésü) ismeretek sokszor a módszerek és eljárások mechanikus alkalmazását sugallják, s ily módon sulyos tévedések forrásaivá válhatnak. Ezek a tények késztettek bennünket arra, hogy matematikai statisztikai példatárat állitsunk össze.

Próbálkozásunk két szempontból is kezdeményezést jelent. Hazánkban – tudomásunk szerint – mind ez ideig nem jelent meg gyakorlati beállitottságu matematikai statisztikai példatár. (Solt György kitünő példatára a valószinüségszámitással foglalkozik és a számunkra gyakorlati szempontból fontosabbnak mondható statisztikai következtetéssel és becsléssel nem.)

A példák összeállitásánál arra törekedtünk, hogy a tárgyalt részek sajátosságának megfelelően elsősorban a matematikai statisztikai gondolkodásmód elsajátitását segitsük elő, illetve szilárd módszertani alapokat adjunk a soronkövetkező alkalmazott részekhez és a gazdasági mérnök szak későbbi tárgyaihoz, amelyekben módszereink széles körü alkalmazást nyerhetnek.

Kezdeményezés jegyzetünk abból a szempontból is, hogy programozott megoldást adunk feladatainkhoz és ez nézetünk szerint nagymértékben megkönnyitheti a gyakorlati problémák matematikai statisztikai módszerekkel való megoldásának elsajátitását.

Példatárunk anyagában igyekeztünk a vezetői-szervezői munkában felmerülő problémák sulyához igazitani a jegyzet arányait. Igy például az eloszlások közül legnagyobb terjedelemben a normális eloszlást, majd a Poisson és a binomiális eloszlásokat tárgyaljuk, másokat csak alapösszefüggéseiben mutatjuk be, ismét másokat egyáltalán nem is emlitünk.

Ugyancsak eddigi oktatási tapasztalataink nyomán törekedtünk a gyakorló gazdasági mérnökök gondolkodásmódjának megfelelő formában és stilusban - kevésbé "matematikusan" - megvilágitani az egyes kérdéseket, ez azonban semmiképpen nem jelenti azt, hogy a mélyrehatóbb elemzések és alkalmazások során elegendő lenne az ismeretek ilyen szintü elsajátitása.

A példák megoldása során - tulmenően a későbbi bevezetőben elmondottakon - a matematikai statisztikai feladatok megoldásának általános menetét ajánljuk.

Pólya György, világhirü magyar származásu matematikust idézzük ennek kapcsán a Gondolkodás iskolája cimü müvéből:

> "...a feladat megoldásában négy szakaszt különböztetünk meg. Először: meg kell értenünk a feladatot. Világosan látnunk kell, hogy mit keresünk. Másodszor: meg kell vizsgálnunk, hogy kapcsolódnak egymáshoz a feladat egyes részei, hogy kapcsolódik az ismeretlen az adatokhoz, hogy megtaláljuk a megoldás alapötletét, hogy tervet készithessünk. Harmadszor: végrehajtjuk tervünket. Negyedszer: a kész megoldást megvizsgáljuk, ujra végiggondoljuk, diszkutáljuk".

A szöveges matematikai statisztikai feladatok megoldásának lépései tehát a fentiek szerint:

1. A feladat szövegének (problémájának) megértése, az ismeretlen(ek) és az adatok rögzitése.
2. A feladat feltételeinek elemzése, a formális leiráshoz szükséges összefüggések megállapitása, a formális leirás.
3. A numerikus megoldás a formális összefüggések alapján.
4. a megoldás helyességének ellenőrzése és a megoldás diszkussziója, szakmai értelmezése.

Jegyzetünk kisérleti jellege folytán köszönettel várjuk a t. Olvasók véleményét, kritikáit, hogy jegyzetünk második részében, ill. további példatárainkban ezeket hasznositani tudjuk.

Végül - de nem utolsósorban - köszönetet mondunk dr. Kindler József adjunktus kollégánknak, aki a tematika összeállitásától kezdve a kézirat leadásáig nagy segitséget nyujtott a jegyzet megirásában; Tánczos Lászlóné egyetemi tanársegédnek, aki a lektori véleményen tul felhivta figyelmünket a kézirat egyes problémáira - valamint azoknak az I. éves gazdasági mérnök hallgatóknak, akik a példák kiszámitásában és programozásra előkészitésében segitségünkre voltak.

A SZERZŐK

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Az oktatás programozásának gondolatát gyakorlati pszichológusok vetették fel századunkban. Bár a gondolat eredete szinte a pedagógia keletkezésével azonos időre tehető, de szisztematikus alkalmazása csak a XX. század közepén indult meg. Ekkor ugyanis a tudományos technikai forradalom hatására problémák merültek fel. Az ismeretanyag rendkivül gyorsan változott, és avulási ideje jelentősen rövidebb lett. Az elsajátitandó anyag és az ember szellemi befogadóképessége közötti feszültség egyre inkább növekedett. Az oktatás formai korszerüsitése igényként jelentkezett, és jelentkezik, mivel egyre több magas felkészültségü szakemberre van szükség. A formai korszerüsités egyik módszere a programozott oktatás.

Mit értünk programozott oktatáson?

"Lényegében az oktatási folyamat tervezésének tudományos alapokra helyezését, s a logikai, pszichológiai, pedagógiai feltételek, valamint a gépadta lehetőségek figyelembevételével összeállitott tananyagnak automatizált formában történő közlését, majd a diákoktól igényelt válaszok - viszontinformációk - azonnali értékelésével az egyéni oktatás feltételeinek megteremtését."+

A programozott oktatás előnyei a hagyományos oktatással szemben:

- aktiv cselekvés folyamán jön létre a tanulás
- állandó ellenőrzés
- ismétlés
- megerősités
- sikerélmény (kudarc-siker)
- egyénnek megfelelő haladási sebesség

A programozott oktatás a következő formákban valósitható meg:

- programozott tankönyv, példatár
- programozott feladatlap
- számitógépes programozott oktatás

A példatárban Skinner professzor által kidolgozott lineáris oktatás programozási módszert használjuk. A módszer a tananyagot kis, logikailag és pszichikailag indokolt részekre bontja, amely könnyen elsajátitható.

+L. Mesterházi-Nagy Márta - dr. Verbóczi Gyuláné: A programozott oktatás. Felsőoktatási Szemle 1965. 2. p. 76-88.

Ennek megfelelően a példatárat a következőképpen kell használni:

1. A mellékelt könyvjelzővel a feladatok melletti, vonallal elválasztott ellenőrző részt letakarjuk.
2. Megoldáskor a pontozott részt kitöltjük.
3. Ezután ellenőrzésként megtekintjük a megoldott sorral azonos sorban levő ellenőrző részt.

A példatár használata csak ugy eredményes, ha a feladatok megoldásakor csak a beirás után ellenőrzünk. Ellenkező esetben csupán megoldott feladat megtekintésére korlátozódik tanulásunk, s ekkor a programozás nem tölti be feladatát. Ha egy feladat során többször helytelenül válaszol, akkor célszerü az elméleti jegyzetből a megfelelő részeket áttanulmányozni, mivel példatárunk tanulmányozása során igen nagy biztonsággal kell helyesen válaszolni.

Példatárunk kisérleti jellegü – előfordulhat, hogy az olvasó célravezetőbb megoldást ismer. Kérjük ezért a jegyzet használóit, hogy észrevételeit, javaslatait juttassa el hozzánk, melyért előre is köszönetet mondunk.

1. LEÍRÓ STATISZTIKA

A leiró statisztika célja, hogy a mérés (számlálás) sorrendjében kapott rendezetlen adathalmazt áttekinthető formában rendezze és egyes jellemző statisztikai értékeit kiszámitsa.

1.1 Az adatok rendezése és ábrázolása

Az általánosan javasolható menet lépései a következők:

1.11 Osztálybasorolás (folytonos adatok esetén).

1.12 A gyakoriság megállapitása. Gyakoriság (f_i) a sokaságban levő azonos tulajdonságu elemek száma.

1.13 A relativ gyakoriságok (g_i) megállapitása

$$g_i = \frac{f_i}{n}$$

ahol n = az adathalmaz összes elemeinek száma.

1.14 Az összegezett (kumulált) gyakoriságok (f'_i), illetve relativ gyakoriságok (g'_i) megállapitása.

1.15 Gyakorisági táblázat készitése 1.12 - 1.13 - 1.14 adataiból.

1.16 A gyakorisági (relativ gyakorisági), ill. összegezett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramok felvétele (folytonos adatok esetén a poligon és az ogiva felvétele).

1.2 A statisztikai jellemzők számítása

A legfontosabb középértékek és ingadozás mérőszámok számitását ismertetjük.

1.21 KÖZÉPÉRTÉKEK

1.211 Módusz (Mo): az eloszlás legnagyobb gyakoriságu értéke (ill. a legnagyobb gyakoriságu osztály a modális osztály)

Megállapitása: a gyakorisági táblázat (vagy hisztogram) alapján

1.212 Medián (M): A változó azon számértéke, amelynél ugyanannyi kisebb, mint nagyobb érték fordul elő

Megállapitása: páratlan számu adat esetén a középső (az $\frac{n+1}{2}$-ik) a nagyság szerint rendezett adatok közül

páros számu adat esetén a két középső adat számtani közepe

1.213 Számtani átlag ($\bar{x}$): az a szám, amellyel az átlagolandó számértékeket helyettesitve ezek összege változatlan marad

Számitása:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$$

ahol x_i = az i-ik (általános) tag számértéke

f_i = az i-ik (általános) tag gyakorisága

g_i = az i-ik (általános) tag relativ gyakorisága

1.214 Harmonikus átlag ($\bar{x}_h$): az a szám, amellyel az átlagolandó értékeket helyettesitve ezek reciprokainak összege változatlan marad

Számitása:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{1}{x_i}}$$

1.215 Mértani átlag (x_g): az a szám, amellyel az átlagolandó értékeket helyettesitve azok szorzata változatlan marad

Számitása:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod x_i} = \sqrt[\Sigma f_i]{\prod x_i^{f_i}}$$

ahol $\prod$ (produktum) az összeszorzás jele

1.216 Négyzetes átlag ($\bar{x}_q$): az a szám, amellyel az átlagolandó értékeket helyettesitve azok négyzetösszege változatlan marad

Számitása:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}}$$

1.22 AZ INGADOZÁS MÉRŐSZÁMAI

1.221 Terjedelem (R): az adathalmazban levő legnagyobb és legkisebb adat különbsége

Számitása: $R = x_{max} - x_{min}$

1.222 Átlagos abszolut eltérés (Δ): az egyes értékek és a számtani átlag különbségeinek abszolut értékeiből számitott számtani átlag

Számitása: $$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,|d_i|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ahol $d_i = x_i - \bar{x}$

1.223 Tapasztalati szórás (s): az egyes értékek és a számtani átlag eltéréseinek négyzetes átlaga

Számitása: $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

$$s = \sqrt{\bar{x}_q^2 - \bar{x}^2}$$

1.224 Relativ szórás (v): a szórás és a számtani átlag hányadosa

Számitása: $$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\,[\%]$$

FELADATOK

1.1 Extrudált müanyagrudacskák tömeggyártásban készülnek. A termék egyik fontos jellemzője a külső átmérő, amelyre vonatkozó minőségi előirás: 8,3 ± 0,1 mm. A termék több ezres darabszámban készül. Egy tétel esetén az átmérő ellenőrzésére kivett 145 elemü minta adatai a következők (0,01 mm pontossággal mérve):

1. táblázat

a	b	c	d	e
8,31	8,29	8,36	8,40	8,26
8,34	8,26	8,31	8,31	8,31
8,36	8,26	8,31	8,22	8,16
8,33	8,31	8,35	8,31	8,33
8,30	8,31	8,31	8,33	8,20
8,29	8,28	8,28	8,32	8,41
8,35	8,33	8,29	8,30	8,41
8,18	8,38	8,35	8,34	8,30
8,41	8,31	8,31	8,33	8,32
8,32	8,28	8,36	8,32	8,25
8,31	8,38	8,44	8,27	8,26
8,31	8,26	8,28	8,32	8,27
8,38	8,22	8,35	8,30	8,30
8,15	8,32	8,31	8,31	8,38
8,31	8,33	8,31	8,34	8,32
8,30	8,19	8,19	8,44	8,32
8,29	8,39	8,42	8,35	8,30
8,13	8,33	8,19	8,34	8,36
8,32	8,31	8,25	8,31	8,50
8,31	8,38	8,33	8,31	8,33
8,23	8,30	8,32	8,35	8,35
8,35	8,29	8,34	8,26	8,28
8,33	8,36	8,31	8,32	8,32
8,26	8,35	8,42	8,32	8,31
8,33	8,23	8,16	8,31	8,38
8,29	8,30	8,30	8,33	8,31
8,50	8,34	8,27	8,31	8,35
8,35	8,46	8,25	8,33	8,22
8,31	8,32	8,34	8,26	8,33

Rendezzük és ábrázoljuk adatainkat! Számitsuk ki a mediánt, a számtani átlagot, a moduszt, a terjedelmet, a szórást és a relativ szórást!

Megoldás:

1. Adataink folytonosak, ezért az osztálybasorolást elvégezzük. Válaszszunk 10 osztályt, legyen az osztályköz szélessége 0, 03 mm.

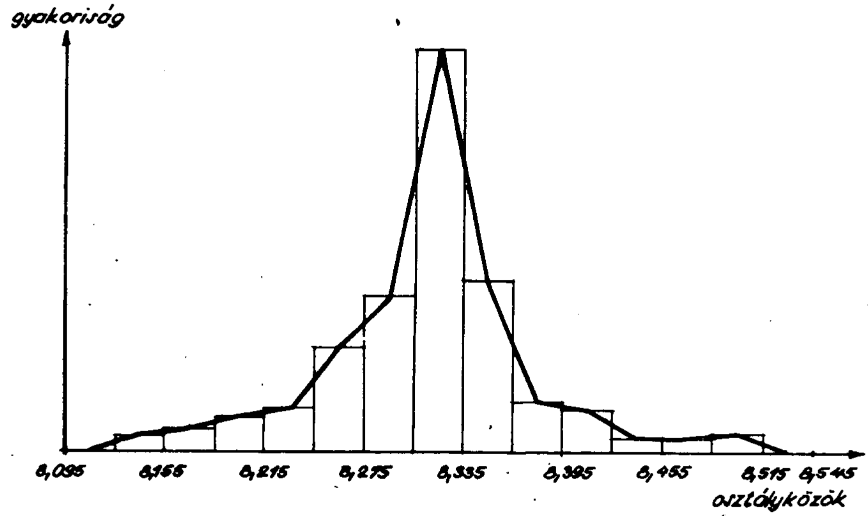
   Igy – mivel a legkisebb adat 8, 13, a legnagyobb 8, 50 – a legalsó osztályköz alsó határa: 8, 125, a legfelső osztályköz felső határa: 8, 515. (A harmadik tizedes az egyértelmü besorolás miatt szükséges!)

   Az osztályhatárokat, osztályközepeket, gyakoriságokat, relativ gyakoriságokat, valamint az összegzett gyakoriságokat és relativ gyakoriságokat a 2. táblázatban foglaltuk össze (gyakorisági táblázat).

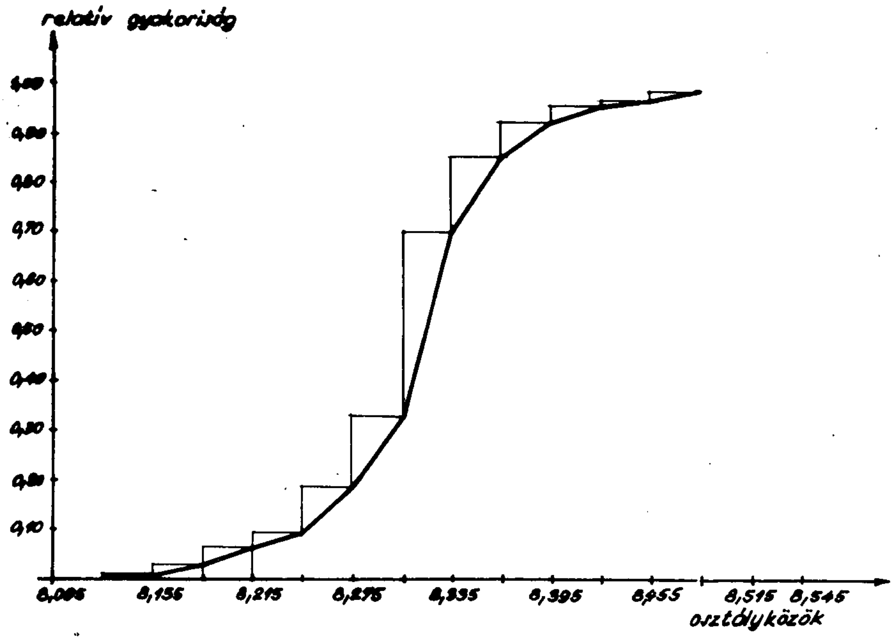
2. táblázat

Osztályhatárok mm	Osztály-közép x_i	Adatok összeszámolása	Gyakoriság f_i	Relativ gyakoriság g_i	Összegzett gyakoriság f'_i	Összegzett relativ gyakoriság g'_i
8,125 - 8,155	8,14	II	2	0,0138	2	0,0138
8,155 - 8,185	8,17	III	3	0,0207	5	0,0345
8,185 - 8,215	8,20	IIII	4	0,0276	9	0,0621
8,215 - 8,245	8,23	卌	5	0,0345	14	0,0965
8,245 - 8,275	8,26	卌 卌 IIII	14	0,0965	28	0,1931
8,275 - 8,305	8,29	卌 卌 卌 卌 I	21	0,1448	49	0,3379
8,305 - 8,335	8,32	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	55	0,3798	104	0,7172
8,335 - 8,365	8,35	卌 卌 卌 卌 III	23	0,1586	127	0,8759
8,365 - 8,395	8,38	卌 II	7	0,0483	134	0,9241
8,395 - 8,425	8,41	卌 I	6	0,0414	140	0,9655
8,425 - 8,455	8,44	II	2	0,0138	142	0,9793
8,455 - 8,485	8,47	I	1	0,0669	143	0,9862
8,485 - 8,515	8,50	II	2	0,0138	145	1,0000
			145	1,0000		

A táblázat adatai alapján a gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramot és a poligont az 1. ábra, az összegzett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramot és az ogivát a 2. ábra mutatja.



1. ábra
Gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogram a 2. táblázat adataiból



2. ábra
Összegzett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogram a
2. táblázat adataiból

A statisztikai jellemzők számitása:

A számitásokhoz a 2. táblázat, az 1. és 2. ábra mellett az alábbi adatokat kell kiszámitanunk ($\bar{x}$ és s számitásához):

3. táblázat

x_i	f_i	x'_i	$f_i x'_i$	x'^2_i	$f_i x'^2_i$
8,14	2	- 6	- 12	36	72
8,17	3	- 5	- 15	25	75
8,20	4	- 4	- 16	16	64
8,23	5	- 3	- 15	9	45
8,26	14	- 2	- 28	4	56
8,29	21	- 1	- 21	1	21
A = 8,32	55	0	0	0	0
8,35	23	1	23	1	23
8,38	7	2	14	4	28
8,41	6	3	18	9	54
8,44	2	4	8	16	32
8,47	1	5	5	25	25
8,50	2	6	12	36	72
	145	0	- 27		567

A táblázatban:

A = a legnagyobb gyakoriságu osztályközép (itt: 8,32 mm)

$$x'_i = \frac{x_i - A}{h}$$

ahol: h = az osztályköz szélessége (itt: 0,03 mm)

Ily módon az egyes jellemzők számitása:

a modális osztályköz: 8,305 - 8,335 ($f_{i,max}$ = 55)

a medián számitása (M):

sorszáma: $\frac{n+1}{2}$ $\frac{145+1}{2}$ = 73. adat

A 73. adat a 8,305 - 8,335 osztályközbe esik ha az ideeső f_i = 55 adatot egyenletesen eloszlónak tekintjük:

egy adat "szélessége" : $\frac{0,03}{55}$ mm a 73. adat a 8,305 után ($f'_i = 49$) a 24.-ik (73-49 = 24), igy:

$$\underline{M} = 8,305 + \frac{24 \cdot 0,03}{55} = \underline{8,318 \text{ mm}}$$

megállapitható a M a 2. ábrából is, ha az ogiva $g_i = 0,5$ ordinátájához tartozó abszcisszát leolvassuk:

$$M = 8,315 \text{ mm}$$

tehát közel azonos a számitottal.

A számtani átlag ($\bar{x}$):

a 3. táblázat adataiból:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i x'_i}{n} h = 8,320 - \frac{27}{145} \cdot 0,03 = \underline{8,314 \text{ mm}}$$

A 2. táblázat adataiból:

$$\bar{x} = \sum g_i x_i = 0,0318 \cdot 8,14 + 0,0207 \cdot 8,17 + \ldots + 0,3798 \cdot 8,32 + \ldots$$

$$\ldots + 0,0138 \cdot 8,50 = \underline{8,318 \text{ mm}}$$

az eltérés tehát gyakorlatilag jelentéktelen

a terjedelem (R): $R = x_{max} - x_{min} = 8,50 - 8,13 = 0,37$ mm

a szórás (s): a 3. táblázat adataiból

$$s = h\sqrt{\frac{\sum f_i x'^2_i}{n} - \left(\frac{\sum f_i x'_i}{n}\right)^2} = 0,03$$

$$\sqrt{\frac{567}{145} - \left(\frac{-27}{145}\right)^2} =$$

$$= 0,03\sqrt{3,88} = \underline{0,059 \text{ mm}}$$

A relativ szórás (v):

$$v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{0,059}{8,314} \cdot 100 \, [\%] = \underline{0,71\%}$$

1.2 Bőrminták felületi ellenőrzése során nagy mennyiségü tételből 40 elemü mintát vizsgáltak. Az egy mintán észlelt hibák számát a vizsgálat sorrendjében a 4. táblázat tartalmazza:

4. táblázat

Hibák	0 2 0 0 1 1 1 2 1 2 2 2 0 1 1 0 0 2 1 1 4 1
száma	0 5 0 3 1 1 0 2 1 1 2 1 0 0 1 4 1 1

Készitsük el a diszkrét gyakorisági táblázatot és ábrázoljuk a diszkrét gyakorisági (relativ gyakorisági) valamint összegzett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramokat! Számitsuk ki a Mo, a $\overline{x}$, a R és a s értékét!

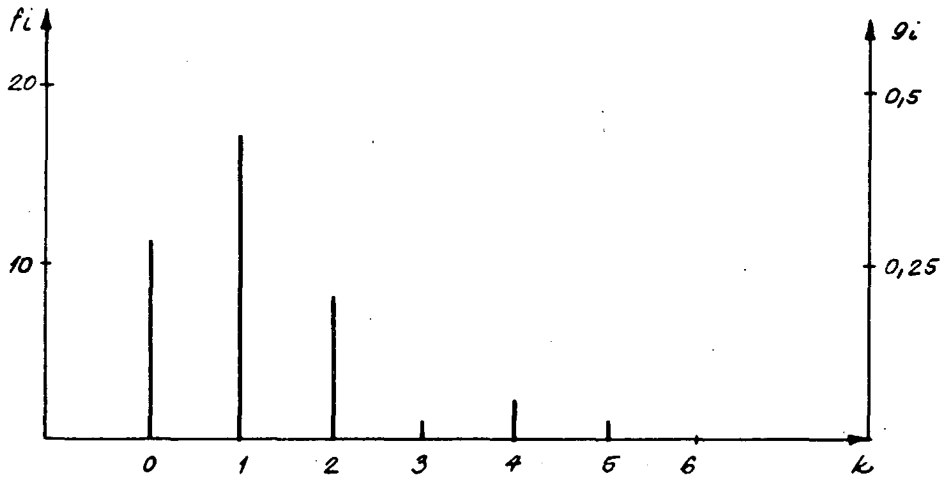
Megoldás

A gyakorisági táblázat a 4. táblázat adataiból a következő:

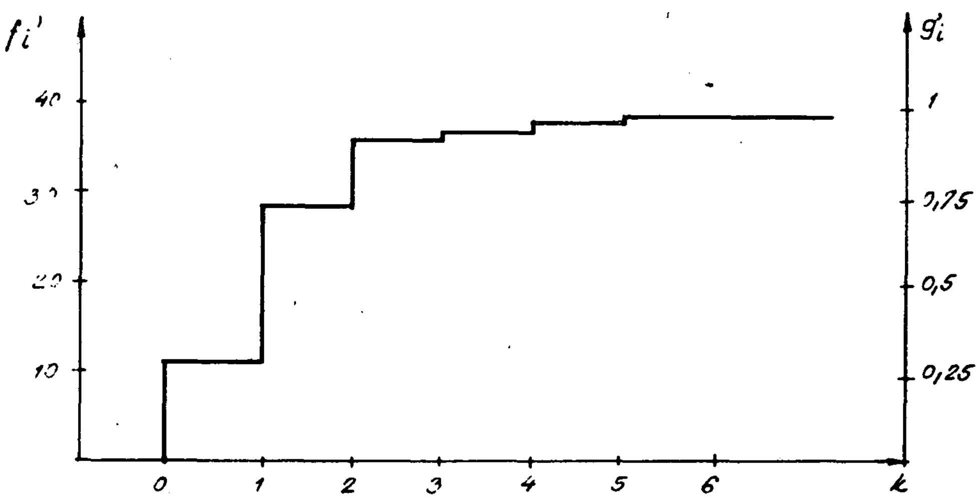
5. táblázat

Hibák száma	Gyakoriság f_i	Relativ gyakoriság g_i	Összegzett gyakoriság f'_i	Összegzett relativ gyakoriság g'_i
0	11	0,275	11	0,275
1	17	0,425	28	0,700
2	8	0,200	36	0,900
3	1	0,025	37	0,925
4	2	0,050	39	0,975
5	1	0,025	40	1,000
	40	1,000		

Az 5. táblázat adatai alapján a diszkrét gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramot a 3. ábra, az összegzett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramot a 4. ábra mutatja.



3. ábra
Diszkrét gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogram
az 5. táblázat adataiból



4. ábra
Összegzett gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogram
az 5. táblázat adataiból

A statisztikai jellemzők:

Mo = 1 M = 1 (sorszámai x_{20}, x_{21})

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{11\cdot 0 + 17\cdot 1 + 8\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5}{40} = \frac{49}{40} = \underline{1,225}$$

(nyilvánvalóan $\bar{x} = 1,225$ hiba esetünkben értelmezhetetlen)

$$R = x_{max} - x_{min} = 5 - 0 = 5$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{\sum f_i}} =$$

$$= \sqrt{\frac{11.(-1,225)^2+17.(0,225)^2+8.(0,775)^2+1.(1,775)^2+2.(2,775)^2+1.(3,775)^2}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{50}{40}} \cong 1,17$$

1.3 Egy papirgyárnak "IV" jelü gépén a minőségellenőrzés a papir négyzetmétersulyát 200 minta alapján ellenőrizte. Az adatokat osztálybasorolva a következő gyakoriságokat nyerték: (a mérés 0, 1 pontossággal történt):

6. táblázat

Osztályhatárok g/m^2	Gyakoriság f_i
63, 05 - 65, 05	1
65, 05 - 67, 05	28
67, 05 - 69, 05	64
69, 05 - 71, 05	74
71, 05 - 73, 05	25
73, 05 - 75, 05	5
75, 05 - 77, 05	2
77, 05 - 79, 05	1
$\sum$	200

Készitsük el a gyakorisági táblázatot és ennek alapján ábrázoljuk adataink eloszlását! Milyen következtetést vonhatunk le a hisztogramból?

Számitsuk ki a számtani átlagot, a szórást és a relativ szórást!

Megoldás

A gyakorisági táblázat az ellenőrzés adatai alapján a következő:

7. táblázat

Osztályhatár g/m^2	x_i g/m^2	f_i	g_i	x'_i	$f_i x'_i$	x'^2_i	$f_i x'^2_i$
63,05-65,05	64	1	0,005	- 3	- 3	9	9
65,05-67,05	66	28	0,140	- 2	-56	4	112
65,05-69,05	68	64	0,320	- 1	-64	1	64
69,05-71,05	A=70	74	0,370	0	0	0	0
71,05-73,05	72	25	0,125	1	25	1	25
73,05-75,05	74	5	0,025	2	10	4	20
75,05-77,05	76	2	0,010	3	6	9	18
77,05-79,05	78	1	0,005	4	4	16	16
Σ		200	1,000		-78		264

Az adatok alapján az elemzéshez szükséges gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogramot az 5. ábra mutatja:

A hisztogram azt mutatja, hogy az adatokban erős bal oldali aszimmetria tapasztalható, ezért feltehetően mintánk nem származhat normális eloszlású sokaságból. (Természetesen ezt bizonyitanunk kell statisztikai próbával!)

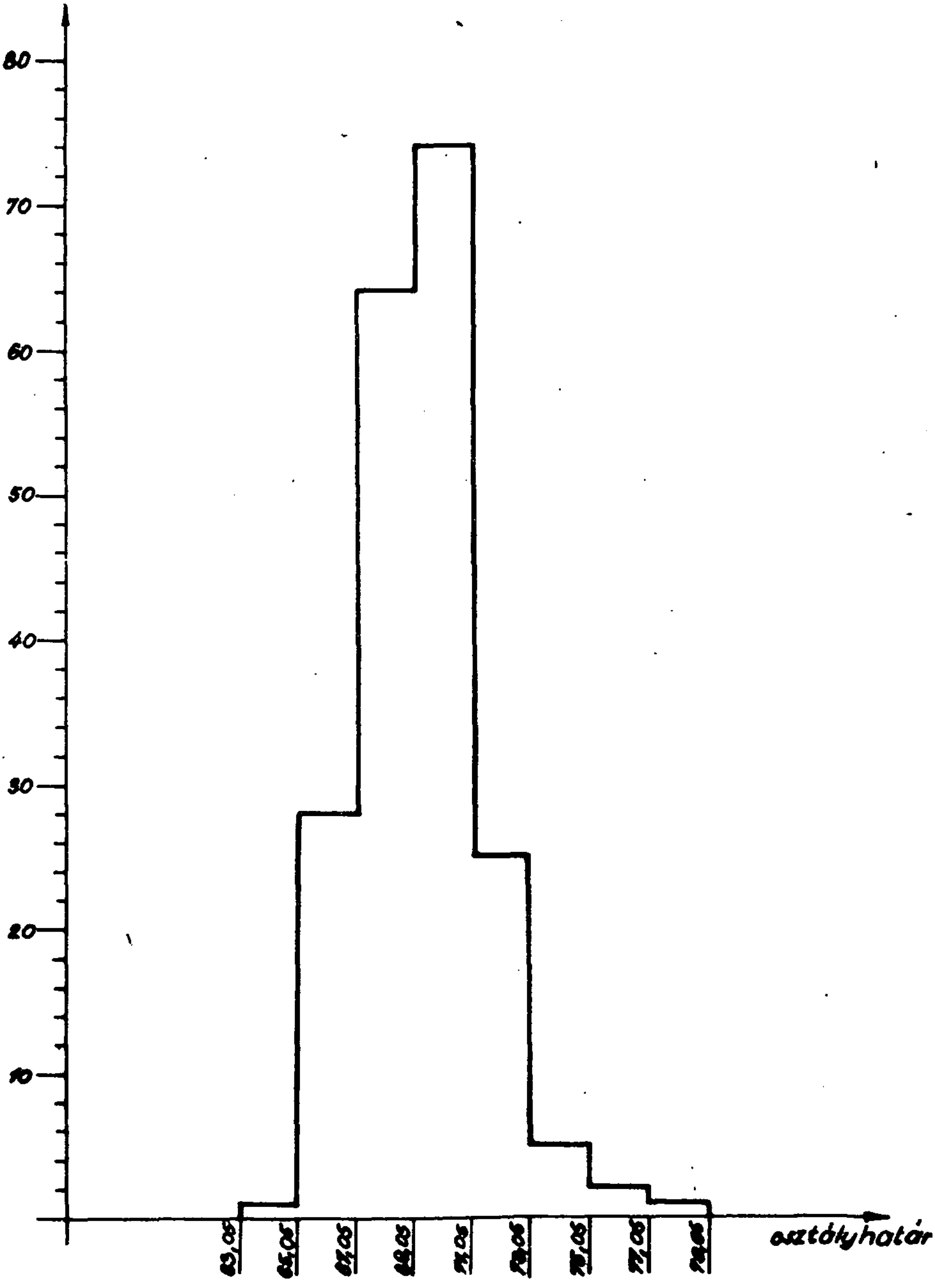
A statisztikai jellemzők a 7. táblázat adatai alapján:

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i x'_i}{n} h = 70 - \frac{78}{200} \cdot 2 = \underline{69,22\ g/m^2}$$

mivel: $A = 70\ g/m^2$ és $h = 2\ g/m^2$

$$s = h\sqrt{\frac{\Sigma f_i x'^2_i}{n} - \left(\frac{\Sigma f_i x'_i}{n}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{264}{200} - \left(\frac{-78}{200}\right)^2} = 2,16\ g/m^2$$

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\,[\%] = \frac{2,16}{69,22} \cdot 100 = 3,14\%$$



5. ábra
Gyakorisági (relativ gyakorisági) hisztogram a 7. táblázat alapján

1.4 A textiliparban az elemi szál szakitószilárdságát 100 elemü minta alapján vizsgálták. A mérést pondban, egész számu pontossággal végezték és a következő adatokat kapták (már nagyság szerint rendeztük az adatokat):

13 | 15 | 16 | 17, 17, 17, 17, 17, | 18, 18 | 19, 19, 19, 19, 19 | 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, | 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, | 22, 22, 22, 22, 22, 22, 22, 22, 22, | 23, 23, 23, 23, 23, 23, 23, 23, 23, 23, 23, | 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, | 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, | 26, 26, 26, 26, 26, 26, | 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, | 28, 28, 28, 28, | 29, 29, | 30, 30, 30, 30, 30, 30, | 32

Osztálybasorolással állapitsuk meg a szakitószilárdság átlagát, szórását és relativ szórását! Ábrázoljuk az adatok eloszlását mutató hisztogramokat!

(M : $\bar{x} \cong 23,4$ pond
$s \cong 3,7$ pond
$v \cong 16$ %

ha : $h = 2$ pond, az osztályköz szélessége ;
ekkor 10 osztály lesz!)

1.5 Egy minőségvizsgáló laboratórium jegyzőkönyve egy termék valamely minőségi jellemzőjére vonatkozóan osztálybasorolt adatokat tartalmaz. Ábrázoljuk az adatok eloszlását és vizsgáljuk meg a hisztogramok alapján származhatott-e a minta normális eloszlásból? Számitsuk ki a minta számtani átlagát, szórását és relativ szórását! A jegyzőkönyv adatait a 8. táblázatban találhatjuk.

8. táblázat

Osztályhatárok	Gyakoriság
$-\infty$ - 65,05	1
65,05 - 67,05	4
67,05 - 69,05	30
69,05 - 71,05	39
71,05 - 73,05	76
73,05 - 75,05	34
75,05 - 77,05	13
77,05 - $+\infty$	7

(M: jó közelitéssel normális eloszlást mutat

$\bar{x} = 71,67$ g/m^2
$s = 2,63$ "
$v = 3,67$ %)

1.6 A Tejipari Tröszt Polipack-tipusu töltő (adagoló) gépe 0,5 l névleges térfogatu tejet adagol müanyag fóliába. Az óránként kb. 3600 egységet töltő gép térfogatadagolással müködik. A térfogat ellenőrzése – a fajsuly ismeretében – sulyméréssel történik, mivel ez roncsolásmentes és megismételhető vizsgálatot biztosit. 5 napi mennyiség ellenőrzésének adatait az alábbi táblázat tartalmazza:

9. táblázat

Osztályhatár gr	f_i
521,2 - 521,7	1
521,7 - 522,2	5
522,2 - 522,7	13
522,7 - 523,2	65
523,2 - 523,7	89
523,7 - 524,2	121
524,2 - 524,7	71
524,7 - 525,2	42
525,2 - 525,7	18
525,7 - 526,2	8
526,2 - 526,7	5
526,7 - 527,2	3
527,2 - 527,7	1

Készitsük el a gyakorisági táblázatot! Ábrázoljuk adataink eloszlását! Számitsuk ki a töltősuly átlagát és szórását!

(M : közel normális eloszlás

$\overline{x} = 524$ gr

$s \cong 0,9$ gr)

2. HALMAZELMÉLET

2.1 A halmaz fogalmát elsődleges alapfogalomnak tekintjük. Dolgoknak bármilyen gyüjteményét, összességét halmaznak nevezzük és e dolgok megjelenési formája lényegtelen. Valamennyi halmaz fontos jellemzője a következő:
bármelyik adott halmaz és bármilyen adott dolog esetében az alábbi két állitás közül csak az egyik lehet igaz:

a) Az adott dolog az adott halmaz eleme
b) Az adott dolog nem eleme az adott halmaznak.

2.2 A halmazt alkotó dolgokat az illető halmaz elemeinek nevezzük. Ismerünk:

véges elemszámu,
végtelen elemszámu,
üres halmazt.

2.3 A halmazokat nagybetüvel, a halmaz elemeit pedig kisbetüvel jelöljük. Ha x eleme A halmaznak, a következőképpen jelöljük:

$$x \in A$$

Ha y nem eleme A-nak:

$$y \notin A$$

Halmaz eleme lehet halmaz is, ezt a következőképpen jelölhetjük:

$A \subset C$ A részhalmaza C-nek

2.4 Definiciók:

2.4.1 Ha $A \subset B$ és $x \in A$
akkor $x \in B$

2.4.2 Végtelen halmaznak végtelen számu részhalmaza van.
Véges n elemü halmaznak 2^n számu részhalmaza van.

2.4.3 Ha $A \subset B$ és $B \subset C$
akkor $A \subset C$

2.4.4 ha $A \subset B$ és $B \subset A$
akkor $A = B$

2.4.5 Üres halmaz (jelölése $\emptyset$) olyan halmaz, amely egyetlen elemet sem tartalmaz.
Minden x-re igaz:

$$x \notin \emptyset$$

Minden A halmazra igaz, hogy:

$$\emptyset \subset A$$

2.4.6 Valódi részhalmaznak nevezzük A halmazt, ha
$A \subset B$ és $A \neq B$

2.4.7 Az A és B halmazok metszetét mindazoknak az elemeknek a halmaza alkotja, amelyek A-val és B-vel is közösek.
Jelölés:

$$A \cap B$$

2.4.8 $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$

2.4.9 A és B halmazok egyesitésén mindazon x elemek halmazát értjük, amelyek vagy A halmazhoz, vagy B-hez, vagy mindkettőhöz hozzátartoznak, vagyis $x \in A$, vagy $x \in B$.
Jelölés: $A \cup B$

2.4.10 Bármelyik A és B halmaz különbségén A halmaz mindazon x elemét értjük, amelyhez nem tartoznak B halmazhoz, vagyis
$x \in A$ és $x \notin B$.
Jelölés: $A - B = A \cap \overline{B}$

2.4.11 Ha két halmaz elemei között kölcsönös és egyértelmü megfeleltetés létesithető, akkor a két halmazt egyenlő számosságunak (ekvivalens) nevezzük.
A halmazok ekvivalenciája a következő három alaptulajdonsággal rendelkezik:

1. Reflexiv tulajdonság:
   $A \equiv A$
2. Szimmetria tulajdonság:
   Ha $A \equiv B$, akkor $B \equiv A$
3. Tranzitiv tulajdonság:
   Ha $A \equiv B \equiv C$, akkor $A \equiv C$

2.4.12 Az összes természetes számok halmazával ekvivalens halmazokat megszámlálható halmazoknak nevezzük.

2.5 Tételek

2.5.1 $A \cap B = B \cap A$

2.5.2 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.5.3 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.5.4 $A \cap (E-A) = \emptyset$

2.5.5 $A \cup (E-A) = A \cup E$

$A \cup E = E$

2.5.6 $E-E = \emptyset$ és $E-\emptyset = E$

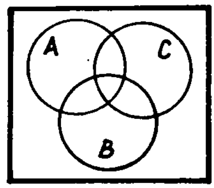
2.5.7 Ha $A \cup B = E$ és $A \cap B = \emptyset$
akkor $B = E - A$

2.5.8 $$\left.\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}\right\} \text{De Morgan tételek}$$

FELADATOK

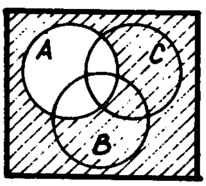
1. Vonalkázza be az alábbi Venn-diagramon a jelölt halmazoknak megfelelő területeket.

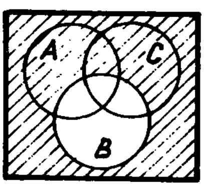
   a) $(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ egyszeres vonalkázás
   b) $(A\cap C)$ - B kétszeres vonalkázás



Megoldás:

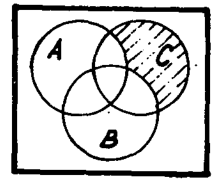
a) A, B és C halmazok egy adott E alaphalmaz részhalmazai.
A és B halmazok komplementerei $\bar{A}$ és $\bar{B}$ az alaphalmaz azon területét jelentik, amelyek nem tartalmazzák az A illetve B halmazt jelentő területeket, tehát



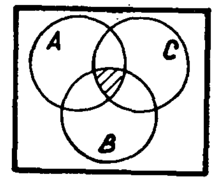


közös

mig a C halmazt a C jelü kör területe reprezentálja.
$\bar{A}\cap\bar{B}\cap C$ halmazok közös részét, az azokat képviselő területek ...... része szimbolizálja, amely tehát igy alakul:



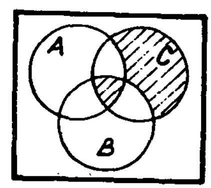
Hasonló módon keressük meg az $A \cap B \cap C$ halmazok szorzatát jelentő közös területet:



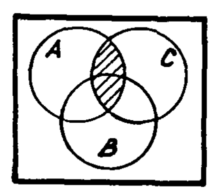
Feladatunk a két eredményhalmaz összeadását irja elő, amely a két szorzatot jelképező terület .... jelenti.

egyesitését

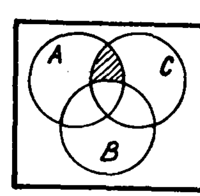
A megoldás tehát vonalkázással jelölve:



b) Képezzük először az $A \cap C$ szorzatot:

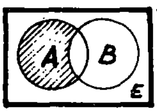


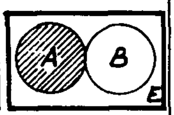
melyből levonva a B halmazt jelképező területet, kapjuk az eredményt:



A

idegen





B, C
részhalmaznak

üres halmaz, A halmazt

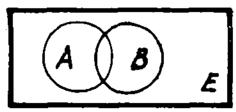
A,
C részhalmaznak
részhalmaz
nem eleme

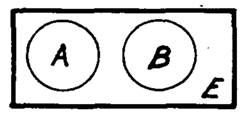
A
nem elemei C

2. Igazoljuk, hogy E alaphalmaz tetszőleges A, B, C részhalmazaira érvényes az alábbi összefüggés:
(A - B) - C = (A --C) - (B - C)

Megoldás:

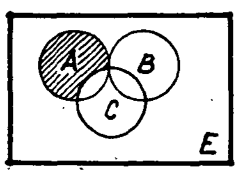
Az A részhalmazból kivonva B-t, eredményül A-nak azt a részét kapjuk, amelyik B részhalmaz egyetlen elemét sem tartalmazza. Ha A és B részhalmazoknak nincs közös eleme, akkor eredményül ... halmazt kapjuk. Tehát ha a két részhalmaz közös metszete üres halmaz, a két halmaz .... (diszjunkt).
Ábrázolva a két esetet:

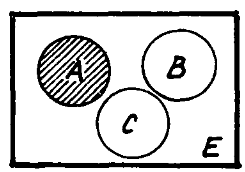




Ebből C részhalmazt levonva, eredményül az A részhalmaznak azokat az elemeit kapjuk, melyek sem ..., sem ..., ... nem elemei
Ha A és C halmaz is diszjunkt, metszetük ...., és eredményül .... kapjuk

Ábrázolva:



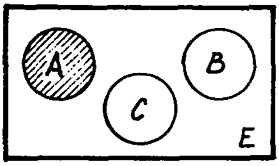


Az összefüggés jobb oldalának első tagja az E halmaz mindazon elemét tartalmazza, melyek elemei ... részhalmaznak, de nem elemei ... .
Ebből kell a B .... minden olyan elemét levonni mely .... C részhalmaznak.
Tehát eredményül E alaphalmaz azon elemeit kapjuk, amelyek elemei ... részhalmaznak, de .... B és .... részhalmaznak

Ha a részhalmazok ...., tehát .... üres halmaz, akkor eredményül .... kapjuk

diszjunktak, közös metszetük A részhalmazt

Ábrázolva:



3. Igazoljuk, hogy egy E alaphalmaz tetszőleges A, B, C részhalmazaira érvényes az alábbi összefüggés:

$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

I. Megoldás

Oldjuk meg a feladatot a halmazelméleti tételek segitségével. Alkalmazzuk először a kivonás azonosságát, mely szerint:

$X - Y =$ ....

$X - Y = X \cap \bar{Y}$
lásd 2.4.10

Az összefüggés bal oldala ekkor igy alakul:

$(A \cap B) - C =$ .... =

$(A \cap B) \cap \bar{C}$

A halmazok asszociativitása alapján a fenti kifejezés egyenlő az alábbival

$= (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C})$

lásd 2.4.8., 2.5.2.

A két tényezőre a kivonás azonosságát alkalmazva kapjuk:

= ....

$(A - C) \cap (B - C)$

ami megegyezik összefüggésünk jobb oldalával, vagyis az azonosság fennáll.

Ha a megoldás részletessége nem elégiti ki, tanulmányozza át a II. megoldást is.

II. Megoldás

Az A kapu B kifejezés a halmazok közös részképzését jelenti. Az A kapu B, tehát az E alaphalmaz azon elemeit foglalja magában,melyek A és B részhalmazoknak elemei $X \in A$ és $x \in B$. Ebből a metszetből el kell távolitani az olyan elemeket, melyek C részhalmaznak is elemei.

Igy az összefüggés bal oldala ... alaphalmaz azon elemeit tartalmazza, melyek ... és ... részhalmaznak elemei, de nem elemei ....

$x \in A$ $x \in$ ... $x \notin$ ...

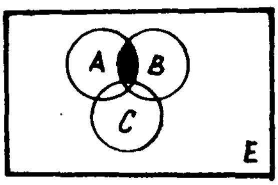
A kifejezés Venn-diagramja: ....

Az összefüggés jobb oldala igy alakul. Az E ....
A .... le kell vonni azokat az elemeket, amelyek .... részhalmaznak is elemei. $x \in A$, de x ...
A, B .... ugyancsak .... azokat az elemeket, amelyek C halmazzal közösek. x ......
x...... . A két részhalmaz közös metszetét .... kapu jelöléssel jelöljük, igy összegezve az előbbieket, az összefüggés jobb oldala tehát az .... azon elemeit tartalmazza, amelyek elemei A .... B részhalmaznak, de .... C részhalmaznak.

Tehát: x .....; ......; C

E
A
B
C részhalmaznak

B   C



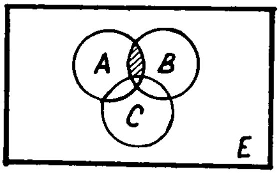
alaphalmaz
részhalmazából
C
$\notin$ C
részhalmazból
le kell vonni
$\in$ B
$\notin$ C
$\cap$ kapu

alaphalmaz

$\cap$,
nem elemei

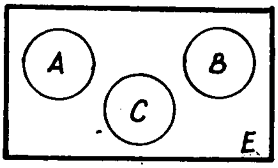
$\in$ A; $x \in B$; $x \notin$

A Venn-diagram:



....

Ha a részhalmazok diszjunktak, tehát közös metszetük üres halmaz, Venn-diagramjuk:



....

Ebből látható, hogy A és B halmaz közös metszete .... halmaz.
A jobb oldal ebben az esetben, mivel A-nak .... B-vel, igy a két halmaz kivonásának eredménye

...... x ∈ A, de x ......

Ugyanigy a ..... részhalmaznak sincs közös eleme .... részhalmazzal, ezért a .... eredménye .... részhalmaz.

Ezek után a jobb oldali kifejezés közös rész képzését kell elvégezni. Mivel az A és B részhalmazok .... (diszjunktak), a közös rész .... jelent.
Tehát az összefüggés általános értelemben igaz.

üres

nincs közös eleme

A ∉ C

B
C
kivonás B

idegenek
üres halmazt

megszámlálható
végtelen

sorozatba

elemü sorozatba
n + k

megszámlálható

4. Igazoljuk, hogy két megszámlálható halmaz egyesitése is megszámlálható.

Megoldás

Az olyan halmazt, amely az összes természetes számok halmazával ekvivalens .... halmaznak nevezzük.
A megszámlálható halmaz elemei .... sorozatba irhatók. Jelölve:

$$\left\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n\right\}$$

Ha feltételezzük, hogy az első halmaz megszámlálható és n elemü .... irható, valamint a második halmaz is megszámlálható és k .... irható, akkor az egyesitett halmaz .... elemü sorozatba irható.
Jelölve:

$$\left\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n\right\}$$
$$\left\{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots\ldots b_k\right\}$$
$$\left\{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n, b_1, b_2, b_3 \ldots b_k\right\}$$

Igy az egyesitett halmaz is .... elemü halmaz, elemszáma n + k.

5. Jelentse A a világbajnokságon résztvevő labdarugók halmazát, B az európai labdarugók halmazát; C a nem európai labdarugók halmazát. Definiáljuk az alábbi halmazt: A "kupa" ill. "kapu" jel helyett a +, ill. . jelet használjuk. (A müszaki szakirodalomban használatos jelölések.)

$$A + (B-A.B) + (C-A.C)$$

a) Eleme-e a halmaznak az ujpesti labdarugó Bene?

b) Eleme-e a halmaznak az angol Arzenal labdarugó csapat?

c) Irja le a szavakkal a megadott halmazt!

d) Rajzolja meg a halmaz Venn diagramját!

Megoldás:

c) Válaszoljunk először a c) kérdésre. Tudjuk, hogy a + jel összeget; a . jel metszetet jelent.

Az $A.B = AB$ jelenti a világbajnokságon résztvevő európai labdarugók halmazát.
Mit jelent AC? ....

a VB-n résztvevő nem európai labdarugók halmazát.

Ezek után irjuk fel mit jelent a (B-AB) kifejezés, ehhez azonban át kell alakitanunk.

Tudjuk, hogy $B-A=B.\bar{A}$, tehát $(B-AB) =$
$= ....$

$B.\overline{AB}$

Alkalmazzuk erre a de Morgan szabályt!

Igy kapjuk: ....

$B(\bar{A}+\bar{B})$

Végezzük el a szorzást! ....

$B\bar{A} + B\bar{B}$

Ebből $B\bar{B} = ...$, tehát marad: .....

O; $B\bar{A}$

Ez szavakkal .... jelenti.

a VB-n részt nem vevő európai labdarugókat

$C\bar{A}$
VB-n részt nem vevő nem európai labdarugókat

$A+B\bar{A}+C\bar{A}$
A VB-n résztvevő vagy a VB-n részt nem vevő európai vagy a VB-n részt nem vevő nem európai labdarugók

$A+B\bar{A} = (A+\bar{A}).(A+B)$

$(A+\bar{A})(A+B)=E(A+B)=$
$=A+B$
$A+C$

$(A+B\bar{A})+C\bar{A}=A+B+C\bar{A}=$
$= A+B+C$

$\bar{B}$
$A\subset(B+C)$

$A+(B+\bar{B})=A+E=E$

a világ összes labdarugóját

igen

nem
igen

Tehát ha a $(B-AB) = B\bar{A}$ kifejezés a VB-n részt nem vevő európai labdarugókat jelenti, mivel egyenlő $(C-AC)$? .....
Ez szavakkal a .... jelenti.
Behelyettesitve a fenti eredményeket az eredeti kifejezésbe kapjuk:
$A+(B-AB)+(C-AC) =$ ....
Ez szavakkal a következőt jelenti: ....

Ezt a kifejezést tovább egyszerüsithetjük.
A disztributiv törvény kimondja, hogy $A+BC = (A+B).(A+C)$. Alkalmazzuk ezt az $A+B\bar{A}$ kifejezésre: ....
Tudjuk, hogy $(A+\bar{A}) = E$ és $EA = A$, tehát az előbbi kifejezés tovább egyszerüsithető ....

A fentiek szerint $A+C\bar{A} =$ ....
Helyettesitsük be a $A+B\bar{A}+C\bar{A}$ kifejezésbe ....
A definicióból következik, hogy $B = \bar{C}$ és $C =$ ..., valamint, hogy A részhalmaza $(B+C)$-nek, amit igy jelölünk: ....
Mivel $B+\bar{B} = E$ és $E+A = E$ ha $A\subset E$, tehát a $A+B+C =$ ....

Tehát a fenti kifejezés .... jelenti.

Válaszoljunk most az a) és b) kérdésre

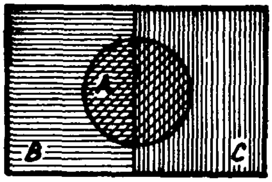
a) A válasz egyértelmüen: ......

b) Ennél a válasznál vigyázzunk! Egy csapat nem labdarugó, hanem labdarugók halmaza. Ezért a helyes válasz: ....., de a csapat tagjaira nézve: ......

d) A Venn diagram felrajzolásánál is vegyük tekintetbe, hogy $\bar{B}$ = C és $A \subset (B+C)$, vagyis $BC = B\bar{B} = O$ és $AB \subset B$; $AC \subset C$. Tehát B, C metszetét, amely üres halmaz, ne jelöljük területtel.

Satirozzuk be A területét ferdén, B-ét vizszintesen, C-ét függőlegesen!

....



6. Ha egy gyár dolgozói közül halmazelméleti jelöléssel a házasokat A-val, a lakatosokat B-vel és a törzsgárdatagokat C-vel jelöljük, kiket definiál az $(A+B) \cdot (\bar{A}+C)$ halmaz?
(A "kupa" ill. "kapu" jel helyett a +, ill. . jelet használjuk.)
Ábrázoljuk Venn diagramon a halmazt!

Megoldás

Alakitsuk át a kifejezést könnyebben értelmezhetőre! Végezzük el a szorzást:

.... Mivel egyenlő az $A\bar{A}$ kifejezés? ..... Marad tehát ....
Próbáljuk meg BC-t beolvasztani az első két részhalmazba,

Minthogy EBC = ... és $A+\bar{A}$= ...... ezért felirhatjuk, hogy BC = ...
Végezzük el a szorzást!..................
Helyettesitsük be BC-t az előbbi kifejezésbe: ....
Rendezzük az egyenletet A és $\bar{A}$ szerint
....

$A\bar{A}+\bar{A}B+AC+BC$
$= O$; $\bar{A}B+AC+BC$

BC; E
$E.BC=(A+\bar{A}).BC$
$(A+\bar{A}).BC=ABC+\bar{A}BC$

$\bar{A}B+AC+ABC+\bar{A}BC$

$(\bar{A}B+\bar{A}BC)+(AC+ABC)$

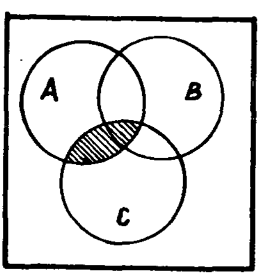
$ABC \subset AC$
$\bar{A}BC \subset \bar{A}B$

$\bar{A}B$; AC
$\bar{A}B + AC$

a nem házasok
a nem házas lakatosok
a házas törzsgárdatagok halmaza

a nem házas lakatosok valamint a házas törzsgárdatagok halmaza

A; C



nem része
B

Minden AB-re igaz, hogy $ABC \subset A$, ezért az ABC és AC viszonyára felirhatjuk: ....
és $\bar{A}BC$-re pedig: ....
Ha általában $A \subset B$ akkor $(A+B) = B$, tehát az $(\bar{A}B + \bar{A}BC) =$ ...... és $(AC + ABC) =$ ......
Tehát az eredeti kifejezés = ...

Ebből $\bar{A}$ jelentése: ....
tehát $\bar{A}B$ = ...
az AC pedig ....
....
....

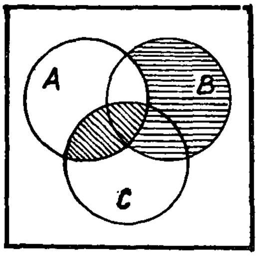
Az egész kifejezés tehát: ....
....
....
.....

Rajzoljuk meg a Venn diagramot! A teljes halmazból 3 részhalmazt definiáltunk, amelyeket körökkel jelölünk. Ezek a halmazok egymást nem zárják ki, tehát a metszeteik nem üres halmazok.

AC metszet alatt azt a területet értjük, amely része ....-nak és ....-nak
Satirozzuk be ezt ferdén a rajzon

$\bar{A}$ alatt azt a területet értjük, amelyik A-nak ....
$B\bar{A}$ alatt tehát ...-nek az a része értendő, amelyik A-nak nem része.

Satirozzuk be ezt vizszintesen, és igy megkapjuk a definiált halmaz Venn diagramját



7. Egy amerikai textilgyárban az ott dolgozó 1000 munkásról a következő osztályozást vették fel: szines bőrü 525, férfi 312, házas 470, szines bőrü férfi 42, szines bőrü házas 147, házas férfi 86, házas szines bőrü 25. Ellentmondás mentesek-e ezek az adatok?
(Az áttekinthetőség miatt alkalmazzunk halmazelméleti jelöléseket pl. A { szines bőrü} B {férfi}, C { házas }.)

Megoldás

Irjuk le halmazelméleti jelölésekkel a meghatározásokat és irjuk hozzá a megfelelő számadatokat!

Szines bőrü n(A) = ... — 525
férfi .... — n(B) = 312
házas .... — n(C) = 470

Milyen kapcsolat van a "Szines bőrü férfi" két részhalmaza között? .... — metszet
Tehát szines bőrü férfi n(AB) = ... — 42

szines bőrü házas .... — n(AC) = 147
házas férfi .... — n(CB) = 86
házas szines bőrü .... — n(CA) = 25

Látunk-e máris ellentmondást? .... — igen

CA
nem egyenlők

részhalmazai
1000

nem

igen esetén hagyja ki a következő segitő részt!

= n(A)

n(AB) rész

n(B)-n(AB)
n(C)-vel
n(AC)
n(BC)-nek
n(ABC)
n(BC)-n(ABC)

Helyes a válasz, mert a kommutativ szabály értelmében AC = ..., viszont a megadott számadatok ....

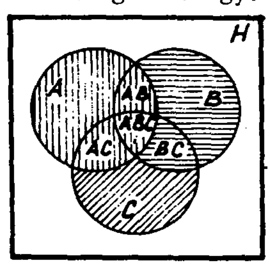
Keressünk további ellentmondást is!
Látható, hogy A, B, C egy halmaznak a ....

Az egész halmaz n(H) = n(A+B+C) = ...
Ha AB, AC, BC nem üres halmaz, akkor igaz-e, hogy n(H) = n(A) + n(B) + n(C)? .....

Mivel esetünkre nem igaz, hogy n(H) = n(A) + + n(B) + n(C), fel tudjuk-e irni a helyes képletet? ....

Ha nem tudja felirni, segit a következő gondolatmenet.

Rajzoljuk fel a H halmaz Venn diagramját ugy, hogy létezik AB, AC, BC metszet és létezhet ABC metszet!
.... Könnyitésképpen satirozzuk be a diagramot igy:



Mivel lesz egyenlő a függőlegesen satirozott rész elemszáma? ....

A vizszintesen satirozott rész nem egyenlő n(B)-vel, mert hiányzik belőle az..........

A vizszintesen satirozott rész tehát: ....
A ferdén satirozott rész sem egyenlő ......,
de ebből nemcsak az ..... rész hiányzik, hanem a .... egy része is.
A n(BC)-ből pontosan az .... rész hiányzik.
Irjuk ezt fel! ....

Irjuk fel tehát a ferdén satirozott részt! ....

$n(C)-n(AC-[n(BC)-n(ABC)]=n(C)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)$

Most már feiirhatjuk n(H)-t ....

$n(H)=n(A)+[n(B)-n(AB)]+[n(C)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)]$

Rendezzük az egyenletet ....

$n(H)=n(A)+n(B)+n(C)-[n(AB)+n(AC)+n(BC)]+n(ABC)$

Fejezzük ki n(ABC)-t ....

$n(ABC)=n(H)+n(AB)+n(AC)+n(BC)-[n(A)+n(B)+n(C)]$

A részhalmaz elemszáma igy ....

Helyettesitsük be az értékeket és számitsuk ki n(ABC) -t n(AC) = 147 .....

- 32

ill.

n(CA) = 25 .... esetekre

- 154

Látjuk, hogy mindkét esetben .... kapunk.

negativ számot

Ebből is látszik, hogy az adatokban ellentmondás .... .

van

8. A gőzherkentyügyár szereldéjének üzemi bizottsága bergengóciai körutazásra akarja küldeni azon nődolgozóit, akik tavaly nem vettek részt az Óperenciás tengeren tartott divatrevüvel egybekötött hajókiránduláson. A szerelde vezetője azt tudja, hogy összesen 305 nődolgozója van és 55 férfi vett részt az üzemből a tavalyi uton. Az üdülési felelős csak arra emlékszik, hogy a szereldéből 240 dolgozó volt az Óperenciás tengeren. Segitsünk a bajbajutott ÜB elnöknek és számoljuk ki hány nődolgozót küldjön ki Bergengóciába!

Megoldás

Jelöljük A-val a gyár nődolgozóit, B-vel a szerelde dolgozóit és C-vel a tavalyi uton résztvetteket. A definicióból következik, hogy a férfiakat ... -sal fogjuk jelölni.
Tudjuk, hogy a szerelde nődolgozóinak száma 305, hogyan jelöljük? ....
Az utazáson résztvett szereldei dolgozók számát is jelöljük ki: ....
Hogyan jelöljük az utazáson résztvett szereldei nődolgozókat? ....
Ezek számára nincs adatunk, pedig ha ezt levonnánk az n(AB)-ből, a keresett eredményhez jutnánk. Mutassuk ki, hogy ez igaz. Jelöljük ki a kivonást: ....
Tudjuk, hogy $A-B=A.\overline{B}$. Alkalmazzuk:
....
Alakitsuk át a de Morgan szabály szerint a kifejezést! ....
....
Végezzük el a szorzást! ....
Mivel $A\overline{A}$ és $B\overline{B}$ = ..., marad ....
Ez tényleg az utazáson részt nem vett szereldei nődolgozók halmaza.
Az előbbi gondolatmenet szerint mondjuk meg mi lesz BC-ABC? ....
Ez szavakkal kifejezve? ....
....
....

$\overline{A}$

n(AB) = 305

n(BC) = 240

ABC

AB-ABC

$AB-ABC=AB.\overline{ABC}$

$AB.\overline{ABC}=AB.$
$.(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$
$A\overline{A}B+AB\overline{B}+AB\overline{C}$
0; $AB\overline{C}$

$\overline{A}BC$
Az utazáson résztvett férfiak halmaza

Erre van adatunk! Helyettesitsünk be a $n(ABC) = n(BC) - n(\bar{A}BC)$ kifejezésbe!

....

$n(ABC) = 185$

Ehhez hasonlóan számolhatjuk ki azon nődolgozóknak a számát is, akiket az ÜB elnök Bergengóciába küld ....
....

$n(AB\bar{C})=n(AB) - n(ABC) = 120$

---

9. Igazoljuk, hogy az E alaphalmaz A; B; C; nem diszjunkt, valódi részhalmazai esetén igaz a következő egyenlőség.

$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})$

ha

a) $A \neq B \neq C$, illetve $\emptyset \subseteq \bar{A}$ de $\emptyset \not\subset \bar{A}$,
valamint $\emptyset \subset B$ és $\emptyset \not\subset \bar{C}$

b) $A \neq B \neq C$, illetve $\emptyset \subseteq \bar{C}$ de $\emptyset \not\subset \bar{C}$,
valamint $\emptyset \subset B$ és $\emptyset \subset \bar{A}$

c) $A \neq B \neq C$, illetve $\emptyset \subset \bar{A}$; $\emptyset \subset B$ és $\emptyset \subset \bar{C}$

Megjegyzés:

A feladatban " $\subseteq$ " szimbólummal a "halmazelméleti rész" fogalmát jelöljük, mely eltér a "hétköznapi rész" fogalmától. A "hétköznapi rész" mindig kevesebb, mint az "egész", mig a "halmazelméleti rész" fogalmába az "egész" is beletartozik. A "köznapi rész" halmazelméleti megfelelője a "valódi rész", melyet " $\subset$ " szimbólum jelöl.

a) feladat megoldása

Ha $\bar{A}$-nak nem valódi részhalmaza a $\emptyset$ üres halmaz ugy irható, hogy ....

$\bar{A} = \emptyset$

$(\emptyset \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (\emptyset \cap \bar{C}) =$
$= (\emptyset \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})$

üres halmaz

üres halmazzal

$B \cap \bar{C}$
$B \cap \bar{C}$

$\emptyset$

$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \emptyset) \cup (\bar{A} \cap \emptyset) =$
$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \emptyset)$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\bar{A} \cap \bar{C} \subseteq \left[(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C}) \right]$

Egyenlőségünkben az $\bar{A}$ helyébe az üres halmazt behelyettesitve ....

Mivel bármely halmaz és az üres halmaz szorzata (metszete) ...., igy a $\emptyset \cap \bar{B}$, illetve a $\emptyset \cap \bar{C}$ egyenlő az ....

Az üres halmaz minden halmaz részhalmaza, tehát az $\emptyset \cup (B \cap \bar{C}) \cup \emptyset =$ .... az $\emptyset \cup (B \cap \bar{C}) =$ .... melynek értelmében ha az üres halmaz nem valódi részhalmaza $\bar{A}$-nak, ugy az egyenlőség bizonyitott.

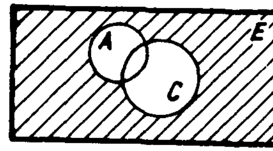
b) feladat megoldása:

Ha az üres halmaz $\bar{C}$-nak nem valódi részhalmaza, akkor $\bar{C} =$ ....
$\bar{C}$ helyébe a bizonyitandó egyenlőség esetén $\emptyset$ üres halmazt helyettesitve,
....
....
valamint figyelembe véve, hogy az üres halmaz minden halmaz részhalmaza irható, hogy ....
melynek megfelelően ha az üres halmaz nem valódi része $\bar{C}$-nak, ugy az egyenlőség bizonyitott.

c) feladat megoldása:

Figyelmesen megvizsgálva az igazolandó összefüggést megállapitható, hogy az egyenlőség akkor bizonyitott, ha a bal oldal harmadik tagja - részhalmazként értelmezve - beolvasztható a bal oldal első két tagjába, vagyis
....

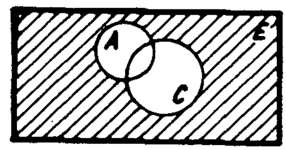
Ábrázoljuk Venn-diagramban egy E alaphalmaz figyelembevételével az $\bar{A} \cap \bar{C}$ halmazt:



$\bar{A} \cap \bar{C}$

....

Képezzük az $\bar{A} \cap \bar{C} \cap E$ metszetet, és ábrázoljuk az igy kapott halmazt a Venn-diagramban:



$\bar{A} \cap \bar{C} \cap E$

....

A két Venn diagram alapján megállapitható, hogy $\bar{A} \cap \bar{C} =$ .... -vel

$\bar{A} \cap \bar{C} \cap E$

Fejezzük ki az E alaphalmazt B és $\bar{B}$ halmazokkal, - meggondolva -, hogy egy rész halmaz és egy komplementerének összege egyenlő az ....
melynek értelmében E = ...

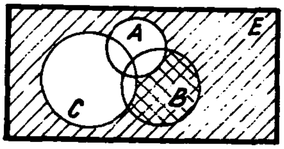
E alaphalmazzal
$B \cup \bar{B}$

Helyettesitsük be E kifejezett értékét az $\bar{A} \cap \bar{C} \cap E$ összefüggésbe:
($\bar{A} \cap \bar{C} \cap E =$ ....) illetve bontsuk fel az egyenlőség jobb oldalán levő zárójelet - figyelemmel arra, hogy halmazok metszetének képzése esetén a disztributivitás értelmezett:
$\bar{A} \cap \bar{C} \cap (B \cup \bar{B}) =$ ....

$\bar{A} \cap \bar{C} \cap (B \cup \bar{B})$

$(\bar{A} \cap \bar{C} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{B})$

Ábrázoljuk az összefüggés bal oldalának első tagját ($\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$) Venn-diagramban:

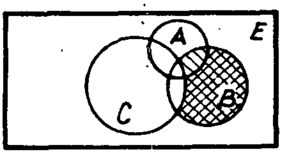


+ $\bar{A} \cap \bar{C}$

$\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$

....

Rajzoljuk fel Venn-diagram segitségével az $\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$ halmaz ábrázolásával egyidejüleg $B \cap \bar{C}$ halmazt:



$\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$

+ $B \cap \bar{C}$

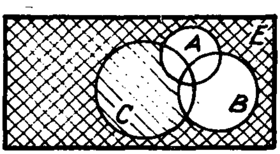
....

melynek alapján megállapitható, hogy $\bar{A} \cap \bar{C} \cap B \subset$ .... -nak és igy irható, hogy $(\bar{A} \cap \bar{C} \cap B) \cup (B \cap \bar{C}) =$ ....

$B \cap \bar{C}$

$B \cap \bar{C}$

Ábrázoljuk az $(\bar{A} \cap \bar{C} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ metszet második tagját is; és ugyanazon Venn-diagramban határozzuk meg $\bar{A} \cap \bar{B}$ halmazt.



$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} =$
$= \overline{A \cup B \cup C}$

+ $\bar{A} \cap \bar{B}$

....

Megállapitható a Venn-diagram alapján, hogy $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subset$....... -nak igy irható, hogy $(\bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ = ...

$\bar{A} \cap \bar{B}$
$\bar{A} \cap \bar{B}$

Összefoglalva:

Az $\bar{A} \cap \bar{C} = (\bar{A} \cap \bar{C} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{B})$ összefüggés jobb oldalának első tagja részhalmaza ...... -nak, második tagja részhalmaza .... -nak, igy .... része $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})$ halmaznak is, mellyel bizonyitott, hogy az $\bar{A} \cap \bar{C}$ beolvasztható az .... halmazba.

$B \cap \bar{C}$
$\bar{A} \cap \bar{B}$ $\bar{A} \cap \bar{C}$

$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})$

10. a) Igazoljuk, hogy az E alaphalmaz A; B; C; nem diszjunkt, valódi részhalmazai esetén - ha $A \neq B \neq C$ és az üres halmaz valódi részhalmaza A; B; C halmazoknak - igaz a következő összefüggés
$A \cup B \cup C = A \cup [B - (A \cap B)] \cup [C - C \cap (A \cup B)]$

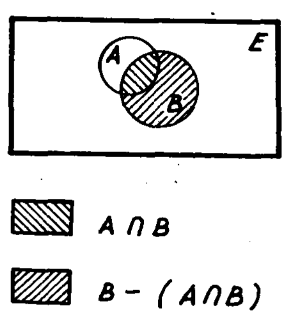
b) Bizonyitsuk be, hogy a meghatározott feltételek mellett az egyenlőség jobb oldalán levő A; $B-(A \cap B)$; $C-C \cap (A \cup B)$ halmazok diszjunktak.

A feladatok megoldhatók a .... összefüggéseinek felhasználásával.

halmazelmélet

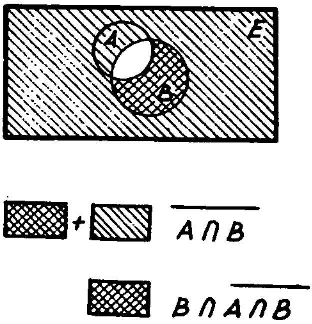
a) feladat megoldása

Ábrázoljuk Venn diagramban a $B-(A \cap B)$ halmazt:



....

Rajzoljuk fel $A \cap \overline{A \cap B}$ halmaz Venn-diagramját:



....

$B-(A \cap B)=B \cap \overline{A \cap B}$

A két Venn-diagram alapján megállapitható, hogy ....

Általánositva az előzőeket; ha A_o=B-vel és $B_o = (A \cap B)$ halmazzal, akkor

$A_o - B_o$ = ..., mely következménye két halmaz különbségének.

$A_o \cap \overline{B_o}$

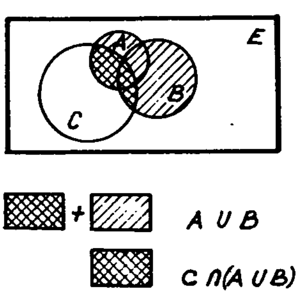
Az általánositott összefüggésünk felhasználásával alakitsuk át $C-C \cap (A \cup B)$ halmazt, melynek eredményeként

$C-C \cap (A \cup B)$ = ...

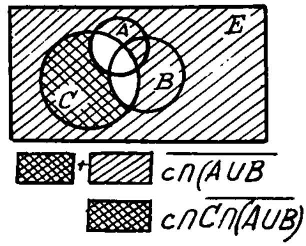
$C \cap \overline{C \cap (A \cup B)}$

Ábrázoljuk a $C-C \cap (A \cup B)$, illetve $C \cap \overline{C \cap (A \cup B)}$ alakban kifejezett halmazt.

$C \cap \overline{C \cap (A \cup B)}$ ábrázolása:

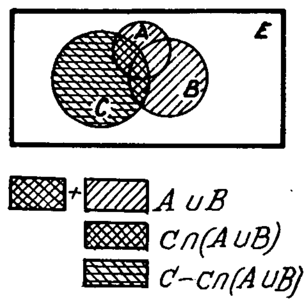


....



....

$C-C\cap(A\cup B)$ ábrázolása:



....

Az összefüggés jobb oldalának $B-(A\cap B)= B\cap\overline{A\cap B}$ és $C-C\cap(A\cup B) = C\cap\overline{C\cap(A\cup B)}$ helyettesitésével irható, hogy

....

$A\cup(B\cap\overline{A\cap B})\cup\left[C\cap\overline{C\cap(A\cup B)}\right]$

Egyenletünk jobb oldalának további átalakitásához a de Morgan féle összefüggéseket használjuk fel, melynek értelmében: $\overline{A_o\cup B_o}$ = ... és $\overline{A_o\cap B_o}$ = ...

$\bar{A}_o\cap\bar{B}_o$

$\bar{A}_o\cup\bar{B}_o$

A de Morgan féle tételben foglaltakat alkalmazva:

$A\cup(B\cap\overline{A\cap B})\cup\left[C\cap\overline{C\cap(A\cup B)}\right] =$

....

$A\cup\left[B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\right]\cup\left[C\cap(\bar{C}\cup\overline{A\cup B})\right]$

A meghatározott összefüggésben kijelölt metszetek kifejtését követően a következő átalakitott alak kapható:

$A\cup(B\cap\bar{A})\cup(B\cap\bar{B})\cup$
$\cup\ (C\cap\bar{C})\cup(C\cap\overline{A\cup B})$

$\emptyset$
$\emptyset$

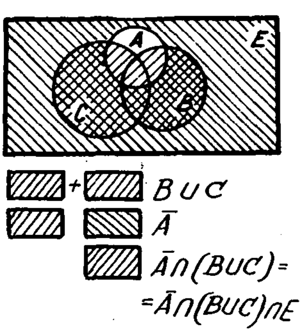
$A\cup(B\cap\bar{A})\cup(C\cap\overline{A\cup B})$

$A\cup(B\cap\bar{A})\cup(C\cap\bar{A}\cap\bar{B})$

$A\cup\bar{A}\cap[B\cup(C\cap\bar{B})]$

$A\cup\bar{A}\cap(B\cup C)\cap(B\cup\bar{B})$

E
$A\cup\bar{A}\cap(B\cup C)\cap E$



$A\cup[B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup[C\cap(\bar{C}\cup\overline{A\cup B})] =$
= ....
....

Bármely halmaz és komplementerének metszete üres halmaz, igy: $B\cap\bar{B}$ = ... és $C\cap\bar{C}$ = ..., melyeknek figyelembevételével összefüggésünk:

....

$\overline{A\cup B}$ de Morgan-féle átalakitását követően:
$A\cup(B\cap\bar{A})\cup(C\cap\overline{A\cup B}) =$
= ....

A disztributiv törvények

$$A_o\cap(B_o\cup C_o) = (A_o\cap B_o)\cup(A_o\cap C_o)$$

illetve

$$(A_o\cap B_o)\cup C_o = [(A_o\cup C_o)\cap(B_o\cup C_o)]$$

alkalmazásával:
$A\cup(B\cap\bar{A})\cup[C\cap(\bar{A}\cap\bar{B})] =$
= ....

$B\cup(C\cap\bar{B})$ halmazra ismételten alkalmazva a disztributivitás törvényét:
$A\cup\bar{A}\cap[B\cup(C\cap\bar{B})] =$
= ....

ahol $B\cup\bar{B}$ = ... -vel, tehát $B\cup\bar{B} = E$ helyettesitésével: ....

Ábrázoljuk a Venn diagramban
$\bar{A}\cap(B\cup C)\cap E$ halmazt:

....

tehát $\bar{A}\cap(B\cup C)\cap E = \dots\dots\dots\dots\dots$	$\bar{A}\cap(B\cup C)$
melynek behelyettesitésével összefüggésünk: $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$A\cup\bar{A}\cap(B\cup C)$
$A\cup\bar{A}\cap(B\cup C)$ halmazra a disztributivitás törvényét alkalmazva: $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$(A\cup\bar{A})\cap(A\cup B\cup C)$
ahol $A\cup\bar{A} = \dots$ -vel és	E
$E\cap(A\cup B\cup C) = \dots\dots\dots\dots$ halmazzal.	$A\cup B\cup C$
Végeredményül megállapitható, hogy $A\cup B\cup C = A\cup[B-(A\cap B)]\cup C-C\cap(A\cup B)$ egyenlőség $\dots\dots$	igaz

b) feladat megoldása:

Két halmazról akkor állithatjuk, hogy diszjunktak, ha metszetük üres halmaz, tehát, ha:

1. $A\cap[B-(A\cap B)] = \dots$	$\emptyset$
2. $A\cap[C-C\cap(A\cup B)] = \dots$	$\emptyset$
3. $[B-(A\cap B)]\cap[C-C\cap(A\cup B)] = \dots$ bizonyitott.	$\emptyset$

b/1 részfeladat megoldása:

$B-(A\cap B)$ a kivonás halmazelmélet értelmezésének megfelelően egyenlő: $\dots\dots\dots\dots$, igy	$B\cap\overline{A\cap B}$
$A\cap[B-(A\cap B)] = \dots\dots\dots\dots\dots$	$A\cap B\cap\overline{A\cap B}$
De Morgan-féle összefüggést az $\overline{A\cap B}$ halmazra alkalmazva $A\cap B\cap\overline{A\cap B} = \dots\dots\dots\dots\dots$	$A\cap B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$
Elvégezve a kijelölt metszetek képzését $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$A\cap B\cap\bar{A}\cup A\cap B\cap\bar{B}$
felismerve, hogy $A\cap\bar{A} = \dots$	$\emptyset$
illetve $B\cap\bar{B} = \dots$ -vel irható; hogy	$\emptyset$
$A\cap B\cap\bar{A} = \dots$ és $A\cap B\cap\bar{B} = \dots$,	$\emptyset$ $\emptyset$

amelynek értelmében bizonyitott az $A\cap[B-(A\cap B)] = \emptyset$ összefüggés.

b/2 részfeladat megoldása

A $C-C\cap(A\cup B)$ halmazra a kivonás definiciójából eredő összefüggést alkalmazva irható, hogy:

$A\cap C\cap\overline{C\cap(A\cup B)}$

$A\cap C\cap[\overline{C}\cup\overline{(A\cup B)}]$

$(A\cap C\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{A}\cap\overline{B})$

$\emptyset$

$\emptyset$

$\emptyset$

$\emptyset$

$(B\cap\overline{A\cap B})\cap[C\cap\overline{C\cap(A\cup B)}]$

$[B\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cap[C\cap(\overline{C}\cup\overline{A\cup B})]$

$[B\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cap[C\cap(\overline{C}\cup\overline{A}\cap\overline{B})]$

$[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})]\cap$
$\cap[(C\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})]$
$\emptyset \quad \emptyset$

$(B\cap\overline{A}\cup\emptyset)\cap(\emptyset\cup C\cap\overline{A}\cap\overline{B}) =$
$= B\cap\overline{A}\cap C\cap\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$

kizárják
diszjunktak

$A\cap[C-C\cap(A\cup B)]$ = ...
amely a de Morgan-féle tétel felhasználásával, átalakitva..................

Végezzük el a kijelölt metszetek képzését, illetve alakitsuk át a de Morgan-féle tétel alkalmazásával $\overline{A\cup B}$ halmazt, amelynek eredményeként irható, hogy
$A\cap C\cap[\overline{C}\cup\overline{A}\cup\overline{B}]$ = ...

A metszet első tagjában a $C\cap\overline{C}$=. . . , második tagjában az $A\cap\overline{A}$ = ... -vel, igy
$(A\cap C\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{A}\cap\overline{B})$ = ...
következményeként megállapitható, hogy az $A\cap[C-C\cap(A\cup B)]$ = ...

b/3 részfeladat megoldása:

A harmadik esetben is feladatunk a $[B-(A\cap B)]\cap[C-C\cap(A\cup B)]=\emptyset$ bizonyitása.

A metszet első és második tagját a kivonás halmazelméleti definiciójának megfelelően alakitsuk át:

....

illetve használjuk fel a de Morgan-féle tételt ....
a de Morgan-féle összefüggés ismételt alkalmazásával irható, hogy:

....

Végezzük el a kijelölt metszetek képzését: ....

....
valamint $B\cap\overline{B}$=. . . . és a $C\cap\overline{C}$= . . . figyelembevételével irható, hogy:
...................................=
=................ = ...

Egyenlőségünk jobb oldalán szereplő három eseményről tehát bebizonyitottuk, hogy valóban páronként .... egymást, tehát ....

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Jelöljük A-val az összes budapesti jármüvek halmazát, B-vel az összes budapesti csuklós jármüvek halmazát, C-vel az autóbuszok, D-vel pedig az összes budapesti földalatti vasuti szerelvények halmazát. Mit jelentenek az alábbi kifejezések?

   a) $B \cap C$
   b) $A \cap D$
   c) $B \cup C$
   d) $C \cup B$
   e) $A - D$
   f) $A - C$

2. Egy egyetemi évfolyamon a lányok közül 60-nak a haja barna, 40-nek mind a haja, mind a szeme barna, továbbá 110 lánynak a szeme és a haja közül legalább az egyik barna.
   Hány barna szemü lány van az évfolyamon? (90)

3. Egy iskolában, ahol kötelező legalább egy idegen nyelv tanulása, az egyik osztályban:

28-an	tanulnak	oroszul
23-an	"	angolul
23-an	"	franciául
12-en	"	oroszul és angolul
11-en	"	oroszul és franciául
8-an	"	angolul és franciául
5-en	"	oroszul, angolul és franciául

   Angolon, francián és oroszon kivül más nyelvet nem tanulnak. Mennyi az osztály létszáma? (48)

4. Három szinnyomással készitik az egyetemi sokszorositóban a különböző plakátokat. Ezen belül:

zöld	szinnyomással	18
piros	"	25
kék	"	17
piros-zöld	"	14
piros-kék	"	8
piros-kék-zöld	"	3

   fajta készül.

   Azt is tudjuk, hogy összesen 36 fajta plakátot nyomunk. Hány kék-zöld szinnyomásu plakátot készitenek? (5)

5. Milyen kapcsolatban állnak az A, B, C halmazok, ha $A \cap B \cap C = A$?

6. Bizonyitsuk be, hogy az összes természetes számokból képzett számpárok halmaza megszámlálható halmaz!

3. ESEMÉNYALGEBRA

3.1 Kisérletnek nevezzük valamilyen jelenség megfigyelését. Valamely kisérlet eredményeit (kimeneteleit) eseményeknek nevezzük. Az események algebrája a konkrét tartalmuktól elvonatkoztatott események kapcsolataival, viszonylataival foglalkozik.

3.2 Egy jelenségre vonatkozó kisérlet lehetséges eredményeit elemi eseményeknek, a kisérletre vonatkozó összes elemi események halmazát eseménytérnek nevezzük. Jelölésére az I betüt használjuk. Egy kisérletre vonatkozó esemény az eseménytér részhalmazaként értelmezhető. Az I halmaz által meghatározott eseményt biztos eseménynek, az üres halmaz által reprezentált eseményt lehetetlen eseménynek nevezzük. Események jelölésére az abc nagybetüit használjuk.

3.3 Ha B esemény bekövetkezése egyuttal az A esemény bekövetkezését is jelenti, akkor azt mondjuk, hogy B esemény maga után vonja A eseményt (jelölve: $B \subset A$, $A \supset B$).

3.4 Két eseményt egyenlőnek nevezünk, ha bármelyik esemény bekövetkezése maga után vonja a másik esemény bekövetkezését is. ($A = B$)

3.5 Azt az eseményt, amelyet ugy fogalmazhatunk meg, hogy az A esemény nem következik be, az A esemény kiegészitő, vagy komplementer eseményének nevezzük és $\bar{A}$-sal jelöljük. Megjegyezzük, hogy:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\bar{I} = O$$

$$\bar{O} = I$$

3.6 Események összege. Az A és B események összegének nevezzük azt az eseményt, amely azt jelenti, hogy A, B események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jelölése $A + B$.

3.7 Események szorzata. Az A, B események együttes bekövetkezését a A, B események szorzatának nevezzük. Jelölése: $A\,B$.

3.8 Események különbsége.

$$A - B = A\bar{B}$$

3.9 Érvényesek a következő azonosságok:

3.9.1	$AO = O$		3.9.9	$A\bar{A} = O$
3.9.2	$A+O = A$		3.9.10	$A+\bar{A} = I$
3.9.3	$AI = A$		3.9.11	$A+(B+C) = (A+B)+C$
3.9.4	$A+I = I$		3.9.12	$A(BC) = (AB)C$
3.9.5	$A+A = A$		3.9.13	$A(B+C) = AB+AC$
3.9.6	$A \cdot A = A$		3.9.14	$AB+C = (A+C)(B+C)$
3.9.7	$AB = BA$		3.9.15	$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
3.9.8	$A+B = B+A$		3.9.16	$\overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}$

FELADATOK

1. Egy osztály létszáma 40, valamely tárgyból az év végi átlaga 3,7. A következő eseményeket vegyük szemügyre:

A: Az osztályban van 5-ös tanuló;
B: Pontosan 5 tanuló bukott meg.
Kérdés, hogy teljesül-e $B \subset A$?
Tudunk-e a kérdésre közvetlenül válaszolni?
...

Ahhoz, hogy a kérdésre válaszolhassunk, meg kell vizsgálnunk, hogy mit jelent B esemény bekövetkezése!
Ehhez ki kell számolnunk a ...., ... összegét, amelyet megkapunk, ha létszámot szorzunk az .... tehát ....

Az 5 bukott tanuló azt jelenti, hogy a fennmaradó ... tanulóra .... pontösszeg marad.

Ha feltételezzük, hogy az osztályban 4-es érdemjegynél jobb ebből a tárgyból nincs, akkor legkedvezőbb esetben .... az elérhető maximális pontszám.

Tehát az osztályban ebben az esetben is kell .. tanulónak lenni, aki ..... eredményt ért el. (Tovább növekszik ezeknek száma, ha nem csupán .... vagy ennél jobb tanulók vannak ebből a tárgyból a bukottakon kivül.)

Tehát B ... A

Nem

jegyek, pontszámok
átlaggal
$40 \cdot 3,7 = 148$

35 143

140

3 jeles

négyes

$\subset$

2. Egy hajónak egy kormányszerkezete, négy kazánja és két turbinája van. Az A esemény azt jelenti, hogy a kormányszerkezet jó, a B_j ($j=1, 2, 3, 4$) esemény, hogy a j-edik kazán jó, a C_k ($k= 1, 2$) esemény pedig azt, hogy a

k-adik turbina jó. A D esemény jelentése, hogy müködőképes a hajó; ez akkor teljesül, ha jó a kormányszerkezet, továbbá legalább egy kazán és legalább egy turbina jó. Állitsuk elő a D és $\overline{D}$ eseményeket az A, B_j és C_k eseményekkel:

A D esemény bekövetkezésének, a hajó müködőképességének feltételei a következők:

1. A kormányszerkezet jó, jelölése ...
2. legalább az egyik kazán jó a négy közül, tehát a négy lehetséges esemény .... kell képeznünk, amelynek jelölése

   ....

3. legalább egy turbina jó, jelölése ....

A hajó müködőképességéhez a 3 feltétel .... fennállása szükséges, tehát a 3 feltételt, mint eseményt össze kell

....

Tehát D = ...

....

A $\overline{D}$ eseményt megkapjuk, ha a D esemény komplementerét képezzük, azaz

$\overline{D}$ = ...

....

Hozzuk ezt egyszerübb alakra a .... képletek alkalmazásával két lépésben, melynek eredményeként kapjuk, hogy

$\overline{D}$ = ...

....

Majd végül $\overline{D}$ = ...

Ellenőrzésként értelmezzük az eredményül kapott 3 esemény összegét!

$\overline{A}$ esemény azt jelenti, hogy ....

$\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4$ eseményszorzat azt jelenti, hogy

....

$\overline{C}_1\overline{C}_2$ eseményszorzat azt jelenti, hogy

....

A

összegét

$B_1+B_2+B_3+B_4$

C_1+C_2

egyidejü

szoroznunk

$A\cdot(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)$

$\overline{A\cdot(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)}$

de Morgan

$\overline{A}+\overline{(B_1+B_2+B_3+B_4)}+\overline{(C_1+C_2)}$

$\overline{A}+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4+\overline{C}_1\overline{C}_2$

rossz a kormány

rosszak a kazánok

rosszak a turbinák

a 3 esemény összeg viszont azt jelenti, hogy .... tehát a hajó müködésképtelen. Eredményünk ezért helyes, hiszen a D esemény ellentett $\overline{D}$ eseményét akartuk kifejezni.	ezek közül legalább egy bekövetkezik

3. Legyen A, B, C három tetszőleges esemény. Irjuk fel eseményalgebrai jelölésekkel az alábbi eseményeket:

a) Csak A következik be. A feladat fogalmazásából következik, hogy B és C események ... következnek be, tehát ezek .... -ét kell vennünk, melyeknek a jelölése ...; és ... . A három esemény együttes bekövetkezését .... adja, a megoldás, tehát	nem komplementer $\overline{B}$; $\overline{C}$; szorzatuk $A.\overline{B}.\overline{C}$
b) A és B bekövetkezik, de C nem. A bekövetkező események .... és ..... . A be nem következő esemény .... A három esemény együttes bekövetkezésének jelölése	A; B. C $A.B.\overline{C}.$
c) Mindhárom esemény bekövetkezik. A megoldást a három esemény .... adja, azaz	szorzata A. B. C.
d) Legalább egyik bekövetkezik. Az eseményekkel végezhető müveletek közül az .... az a müvelet, melynek eredményeként létrejövő esemény azt jelenti, hogy az összeadott események közül .... bekövetkezik. A megoldás ezek után	összeadás legalább egy A+B+C
e) Legalább kettő bekövetkezik. Három eseményből legalább kettő esemény ....-képpen következhet be,	háromféle

AB; AC; BC

összege
$AB + AC + BC$

három

bármelyik

$\bar{A}B\bar{C}$.

összeadásuk

$\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}$

háromféle

$AB\bar{C}$

$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

$AB+AC+BC$

legalább egy

kivonjuk

együttes ABC

$(AB+AC+BC) - ABC$

melyek jelölése a szorzási szabály alkalmazásával ...., ..., ...

A három lehetőség közül legalább egynek a bekövetkezését, ezek .... eredményezi, tehát ....

f) Az egyik bekövetkezik.
A feladatot ugy is fogalmazhatjuk, hogy csak egy következik be, a másik kettő nem. Ez nyilvánvaló, hogy ....-féleképpen történhet, hiszen a három eseményünk közül .... lehet a bekövetkező.
Irjuk fel például azt az esetet, amikor B következik be A és C pedig nem: ....
Hasonló módon képezhetjük a másik két lehetőséget is, s miután ezek páronként egymást kizáró események, ...
a feladat megoldását jelenti, mivel csak valamelyik lehetőség következhet be.

A megoldás: ....

g) Kettő következik be.
Az előző feladatunkhoz hasonlóan ez is ....-képpen következhet be, miután háromféle lehet a nem bekövetkező harmadik esemény.
Irjuk fel például azt az esetet, amikor A és B bekövetkezik, mig C nem: ....
A három lehetőség egymást kizáró esemény összeadásuk adja tehát a megoldást
....
A feladatot még az alábbi módon is meg lehet oldani:
képezzük a páronként bekövetkező események három lehetőségének összegét:
....
Az összeadás szabálya szerint ebből a három eseményből ...., de mind a harom is bekövetkezhet, aminek a lehetőségét viszont ki kell zárnunk. Ezt elérhetjük, ha ebből az összegből ....
a nemkivánatos eseményt, amely a három .... bekövetkezése, azaz ......
Második megoldásunk tehát
....

h) Egyik sem következik be.
Az előzőek alapján könnyen belátható, hogy a három esemény komplementerének együttes bekövetkezéséről van szó, azaz ....
Tehát a megoldás: ....

i) Kettőnél nem több következik be.
A feladat más fogalmazásban azt jelenti, hogy ..., ..., vagy ... esemény következhet be, illetve .... nem következik be.
A megoldást tehát, az események .... az .... adja meg, azaz ...., mely kifejezést a .... szabály alapján igy is irhatunk: ....

j) Legalább A, vagy legalább B és C következik be.
Az egyik esemény tehát A, mig a másik B és C együttes bekövetkezése, tehát .....
Legalább az egyik bekövetkezését kivánjuk elérni, tehát a két eseményt .... azaz a megoldás ....

szorzatáról
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

0; 1; 2
legalább egy

komplementerének
összege; $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$
de Morgan
$\overline{ABC}$

BC

összeadjuk
A+BC

4. Egy készülék két részből áll. Az első rész két egységet, a második három egységet tartalmaz. Az A_j ($j=1, 2$) esemény azt jelenti, hogy az első rész j-edik egysége jó, a B_k ($k=1, 2, 3$) esemény pedig azt, hogy a második rész k-adik egysége jó. A készülék müködőképes, ha az első résznek legalább egy egysége, a második résznek pedig legalább két egysége jó. Irjuk fel a C eseményt, amely azt jelenti, hogy a készülék jó, az A_j és B_k eseményekkel!

A C esemény bekövetkezésének,azaz a készülék müködőképességének két feltételét irjuk fel az eseményalgebra jelöléseivel!

1. az első rész első egysége jó, jelölése .... az első rész második egysége jó, jelölése ....

   Első feltételünk teljesitését, hogy legalább az egyik rész legyen jó, a két esemény ...., adja, azaz ....

2. a második rész három egységének jó állapotát jelöljük ..., ..., ... eseményekkel.
   Második feltételünk, hogy ezek közül legalább valamelyik kettő jó legyen, könnyen belátható, hogy ... féleképpen teljesülhet, azaz ......; vagy ......, illetve ...... eseménypárok következnek be, s ezek... eredményezi a legalább egyik eseménypár bekövetkezését, azaz ....

   Mindkét feltételünk egyidejü fennállását a feltételeket kifejező események .... adja, feladatunk megoldása tehát C = ...

   ....

A_1

A_2

összege, A_1+A_2

B_1; B_2; B_3

3

B_1B_2; B_1B_3; B_2B_3

összege

$B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3$

szorzata

$(A_1+A_2)(B_1B_2+B_1B_3+$
$+B_2B_3)$

5. Egy kazánházi berendezés két kazánból és egy gépből áll. Az A esemény azt jelenti, hogy a gép jó, a B_k (k=1, 2) esemény azt, hogy k-adik kazán jó. A C esemény jelentése, hogy a berendezés müködőképes, ami akkor teljesül, ha a gép és legalább az egyik kazán jó. Fejezzük ki a C és $\overline{C}$ eseményeket az A és B eseményekkel!

A C esemény bekövetkezésének, azaz a berendezés müködőképességének feladatunk szerint ... feltétele van. — 2

Az egyik feltétel a gép müködőképessége, tehát ... esemény bekövetkezése. — A

A második feltétel, legalább az egyik kazán üzemképessége. A kazánok üzemképességét egyenként jelöljük .... és .... eseményekkel. — B_1; B_2

Legalább az egyik bekövetkezését a két esemény .... -a eredményezi, azaz .... — összeadás; B_1+B_2

A két feltétel együttes bekövetkezését ezek után megkapjuk, ha a feltételeket kifejező eseményeket .... — összeszorozzuk

Tehát a keresett esemény C = ... — $A\,(B_1+B_2)$

A C esemény komplementere ... azt jelenti, hogy a berendezés nem üzemképes, amely az alábbi két feltétel bármelyikének bekövetkezése esetén megvalósul: — $\overline{C}$

nem jó a gép, jelölése .... — $\overline{A}$

mindkét kazán rossz, jelölése .... — $\overline{B}_1\,\overline{B}_2$

Legalább az egyik feltétel bekövetkezését a kettő .... adja, tehát — összege

$$C = \overline{A}+\overline{B}_1\overline{B}_2$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a C esemény komplementerét irjuk fel és azt a .... szabály két lépésben történő alkalmazásával átalakitjuk, azaz — de Morgan

$$\overline{C} = \overline{A\,.\,(B_1+B_2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{A}+\overline{B_1+B_2} = \overline{A}+\overline{B}_1\overline{B}_2$$

6. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j-vel azt az eseményt, hogy j-edik dobás 6-os. Fejezzük ki B_j-kel a következő eseményeket:

a) az ötödik dobáskor kapunk először hatost (A_1);
Az öt dobás tehát öt eseményt jelent. Megállapodás szerint B-vel jelöljük azt a dobást, amikor 6-ost dobunk.
Hogyan jelöljük a nem 6-os dobást? ....
A feladatból következik, hogy az első négy dobás ...., eseményének jelölése ...
Az ötödik dobás 6-os, jelölése ....
Az 5 esemény együttes bekövetkezését az adott események szorzata adja.
Tehát a megfelelő indexeket használva az események szorzata:

$$A_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

b) Legalább egyszer 6-ost dobunk (A_2).
Az 5 esemény közül csak egy - sorrendben tetszőlegesnek - a biztos bekövetkezésére számitunk, de az 6-os dobás legyen, melynek a jelölése .....
A legalább egyszer 6-ost dobunk azt jelenti, hogy a többi dobás is lehet ... -os, tehát ezeket az eseményeket is ...... -vel jelöljük.
Az adott események közül legalább az egyiknek a bekövetkezését, mint tudjuk az események összeadása eredményezi.
A keresett esemény tehát:

$$A_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

c) Pontosan 4-szer dobunk 6-ost (A_3).
A négyszer dobunk 6-ost azt is jelenti, hogy az 5 dobásból ..... nem 6-ost dobunk. Miután nincs megkötve, hogy hányadik dobás legyen a nem 6-os, az A_3 esemény bekövetkezhet ugy, hogy bármelyik dobás lehet a nem 6-os, tehát ....
....
Irjuk fel például azt az eseményt, amikor a 3-ik dobás nem hatos: ....

$\overline{B}$

nem 6-os
$\overline{B}$
B_5

$\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4B_5$

Bj

6
B_j

$B_1+B_2+B_3+B_4+B_5$

egy

ötféleképpen

$B_1B_2\overline{B}_3B_4B_5$

Az ötféle eseménysorozatból a feladat teljesitéséhez csak .....-re van szükségünk, vagylagosan az 5 egymást kizáró esemény közül, amelyet megkapunk, ha az eseményeket .... — egy; összeadjuk

A keresett esemény tehát:

$A_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\bar{B}_1B_2B_3B_4B_5+B_1\bar{B}_2B_3B_4B_5 +$
$B_1B_2\bar{B}_3B_4B_5+B_1B_2B_3\bar{B}_4B_5 +$
$+ B_1B_2B_3B_4\bar{B}_5$

d) Az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os (A_4). Az első és negyedik dobás 6-os, biztosan bekövetkező események, jelöljük őket .... és .... — B_1 ; B_4

A harmadik feltétel azt jelenti, hogy a 2. 3. és 5. dobásokból legalább ..... nem 6-os, de mind a három is lehet nem 6-os, jelölésük tehát ...; ...; ... . — egy; $\bar{B}_2$; $\bar{B}_3$; $\bar{B}_5$

Hogy ebből a 3 komplementer eseményből legalább egy biztosan bekövetkezzék, ezeket .... — összeadjuk

Az adott jelölésekkel: .... — $\bar{B}_2 + \bar{B}_3 + \bar{B}_5$

A feladatot tehát három részeredményre bontottuk, melyeknek együttes bekövetkezését kivánjuk elérni, tehát ezeket .... — összeszorozzuk

A keresett esemény tehát:

$A_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ — $B_1 \cdot B_4 \cdot (\bar{B}_2+\bar{B}_3+\bar{B}_5)$

7. Milyen feltétel mellett érvényes az

$$A + (B - C) = A + B - C$$

összefüggés?

Megoldás

A bal oldalnak eleme mindazon x elemi esemény, mely A eseménynek, vagy a B-C esemény különbségnek eleme.
A B - C esemény különbség azt jelenti, hogy elemei mindazon elemi események, melyek .... B-nek, de .... elemei .... Ez megegyezik a jobb oldallal.

elemei nem C-nek

Az események egyesitésének müvelete asszociativ, mivel itt a zárójel az egyesitésre és nem a .... képzésére vonatkozik, ezért .... ami a jobb oldalt eredményezi.

különbség elhagyható

Az összefüggés érvényessége .... előfeltételt.

nem támaszt

8. Milyen kapcsolat van az A; B események között, ha

$$(A + B) - B = A$$

Megoldás

Az események különbségét ugy értelmezhetjük, hogy pontosan akkor következik be, ha az (A + B) teljesül, de B nem, vagyis A két esemény olyan szorzata, amelyben a kivonandó esemény ellentettje szerepel. Igy a bal oldal az (A + B) és a ...., események ....

$\overline{B}$ szorzata.

$$(A + B) - B = (A + B)\,\overline{B}$$

Alkalmazva az egyik disztributiv törvényt:

$$(A + B)\,\overline{B} = A\overline{B} + \dots\dots\dots\dots = A\overline{B}$$

$B\overline{B}$ lásd 3.9.9

Igy egyenlővé téve a jobb oldallal:

$$A\overline{B} = A$$

Irjuk fel az $AB + A\overline{B}$ kifejezést és a disztributiv törvényt alkalmazva egyszerüsitsük ezt az összefüggést:

$AB + A\overline{B} = A(\ldots + \ldots) = \ldots$

Aláirva az előbbi végeredményt:

$$A\overline{B} = A$$

azt tapasztaljuk, hogy ez csak akkor igaz, ha $AB = \ldots$. Tudjuk, hogy ha két esemény kizárja egymást, akkor szorzatuk

... .

Tehát az A és B esemény ...., ha fennáll az $(A + B) - B = A$ esemény.

$B \quad \overline{B} \quad A$

O

O

egymást kizárja

---

9. Fejezzük ki az ismeretlen X eseményt az ismert A és B eseményekkel a következő egyenlőségből

$$\overline{(X + A)} + \overline{(X + \overline{A})} = B$$

Megoldás:

A bal oldali összeg első tagjára alkalmazni lehet a de Morgan azonosságot:

$$\overline{X + A} = \overline{X}\,\overline{A}$$

tehát két esemény összegének ellentett kifejezése egyenlő a két tag .... szorzatával.

A bal oldal második tagjára alkalmazva .... képletet

$$\overline{X + \overline{A}} = \ldots\ldots$$

Tehát $B = \overline{X}\,\overline{A} + \ldots\ldots$

Alkalmazva a disztributiv törvényt:

$$B = \overline{X}\,\overline{A} + \overline{X}\,A = \overline{X}\,(\ldots\ldots\ldots)$$

$\overline{A} + A = I$ kifejezés .... esemény

ellentettjének

de Morgan

$\overline{X}\ A$

$\overline{X}\ A$

$(\overline{A} + A)$

biztos

lásd 3.9.3

$\overline{B}$

független

be nem következése

Ezt a helyettesitést alkalmazva:

$$B = \bar{X}\, I = \bar{X}$$

Mindkét oldal ellentettjét képezve

$$X = \ldots\ldots$$

Tehát X bekövetkezése .... az A esemény bekövetkezésétől, de B esemény bekövetkezésétől függ, mivel B .... esetén valósul meg.

---

de Morgan

$\bar{A} + \overline{B+C}$

$\bar{A} + \bar{B}\bar{C}$

$\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}$

$A\bar{A} = 0$
$\bar{B}C\bar{C}D = 0$

10. Hozzuk egyszerübb alakra a következő kifejezést:

$$AB + C + \overline{A\ (B+C)}\ (CD+A)$$

Tekintsük először csupán az $\overline{A\ (B+C)}$ kifejezést!
Milyen azonosságot tanultunk az összeg ellentettjére? ....
Ennek segitségével a kifejezést át tudjuk alakitani a következő alakra:
$\overline{A\ (B+C)}$ = ...

Ha most a de Morgan azonosságot a második tagra még egyszer alkalmazzuk, akkor a:

....

kifejezést kapjuk.
Ezt helyettesitsük be eredeti kifejezésünkbe, amelyre alkalmazzuk a disztributiv törvényeket:

$$AB + C + (\bar{A}+\bar{B}\bar{C})\ (CD + A) =$$
$$AB + C + \bar{A}CD + \bar{A}A + \ldots\ldots$$

melyet egyszerüsitve a következő alakot kapjuk:

$$AB + C + \bar{A}CD + A\bar{B}\bar{C}$$

mivel $A\bar{A}$ = ...
$\bar{B}\,C\bar{C}D$ = ...

Ismét a disztributiv törvényt alkalmazva

$A\,(B+\overline{B}C) + CI + \overline{A}CD =$ ....

.... =

$= AB + A\overline{C} + C$

$A(B+\overline{B})\ (B+\overline{C}) + C\,(I+\overline{A}D)$

$AI\,(B+\overline{C}) + CI = A\ (B+\overline{C}) + C$

A második és harmadik tagra a disztributiv törvényt alkalmazva

$AB + A\overline{C} + C =$ ....

amely mivel $\overline{C} + C =$ ....

$AB + (A+C)\ I =$ ....

az A-t kiemelve

....

mivel $B + I =$ ....

a végeredmény adódik: ....

$AB + (A+C) \cdot (\overline{C} + C)$

$\overline{C} + C = I$

$AB + AI + CI$

$A\ (B + I) + C =$

$B + I = I$

$= A + C$

11. Mutassuk meg, hogy három tetszőleges esemény összege mindig felirható a következő alakban:

$$A + B + C = A + (B - AB) + \left[C - C\,(A + B)\right]$$

és a jobb oldalon álló 3 esemény páronként kizárja egymást.

Megoldás

A jobb oldalt vizsgálva a kijelölt különbség képzést elvégezve:

$$A + (B - AB) + \left[C - C\,(A + B)\right] =$$
$$= A + B\,\overline{AB} + C\ \overline{C(A + B)}$$

A továbbiakban alkalmazva a – két esemény szorzatának ellentettje megegyezik a két esemény ellentettjének összegével – de Morgan képletet

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Ennek analógiájára $\overline{C(A + B)} =$ ....

$\overline{C} + \overline{(A + B)}$

A de Morgan képlet azt is kifejezi, hogy két esemény összegének ellentettje egyenlő a két esemény ellentettjének ....

szorzatával

$A+B(\bar{A}+\bar{B})+C(\bar{C}+\bar{A}+\bar{B})$

$B\bar{A} \quad C\bar{A} + \bar{B}C$

disztributiv

O

nem, biztos

$(A+\bar{A})\ (A+B+C)$

I

biztos esemény

megegyezik

nullával

O

disztributiv

de Morgan

$AB(\bar{A}+\bar{B})$; $AB\bar{B} = O$

O

A

$\left[C - C(A+B)\right]$,

nullával

de Morgan

$\overline{(A + B)} = \bar{A} \,.\, \bar{B}$

Ezek után az

$A + B\,\overline{AB} + C\ \overline{C\,(A + B)} =$ ....

Megfelelően a disztributiv törvénynek

$A +$ .... $+ B\bar{B} + C\bar{C} +$ ....

a .... törvényt alkalmazva.

$A + \bar{A}(B + \bar{B}C) = A + \bar{A}(B + C).(B + \bar{B})$

A $B\bar{B}$ kifejezés értéke .... .

$B + \bar{B} = 1$, mert az, hogy egy esemény bekövetkezik, vagy ..., az .... esemény. Igy a jobb oldal az

$$A + \bar{A}\ (B + C)$$

kifejezésre szükül.

Erre az összefüggésre alkalmazva az $A + BC = (A + B)\ (A + C)$ disztributiv törvényt, eredményül a következőket kapjuk:

$$A + \bar{A}\ (B + C) = \text{.................}$$

$A + \bar{A} =$ ..., mivel egy eseménynek és ellentettjének bekövetkezése .... Igy a jobb oldal .... a bal oldallal. Hogy a jobb oldali tagok páronként kizárják egymást, annak az a feltétele, hogy szorzatuk .... legyen egyenlő.

$$A(B - AB) = \dots.$$

A .... törvényt alkalmazva

$$AB - AAB = AB - AB = O$$

Ez egyszerüen belátható, de elvégezve a müveletet és .... képletét alkalmazva

$$AB\overline{AB} = \dots. = AB\bar{A} + \dots..$$

$$A \cdot \bar{A} = \dots.$$

Az $A\left[C - C(A + B)\right]$ kifejezés az .... és ...., tagok szorzata egyenlő ....

Elvégezve a müveletet és alkalmazva a .... képletet

$A\left[C - C(A + B)\right] = A\left[C\,\overline{C(A + B)}\right] =$

$= A\left[C(\dots\dots\dots\dots)\right] =$

a disztributiv müveletet elvégezve

$A\left[C\overline{C} + \dots\dots\dots\right] = \dots\dots +$
$+ \dots\dots\ (\overline{A + B})$
$AC\overline{C} = \dots,\ \dots\dots\dots = \overline{A}\ \overline{B}$

és igy $A\ C(\overline{A + B}) = A\ C\ \dots\dots = 0,$
mert $\dots\dots = 0$

$(B - AB)\left[C - C(A + B)\right]$.

Az előzőeknek megfelelően:

$B\,\overline{AB}\ .\ C\ \overline{C(A+B)} = B\,(\overline{A}+\overline{B}).\,C\left[\overline{C}+(\overline{A+B})\right] =$

$= \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots = B\ \overline{A}\ C(\overline{A+B}) =$

$= \dots\dots\dots\dots = 0,$

mivel $\dots\dots\dots = 0$

Ahol az elvégzett átalakitások sorrendben:

1. ....
2. ....
3. disztributiv törvény,
4. ....
5. de Morgan képlet

$\overline{C} + \overline{A+B}$

$C\ (\overline{A+B});\quad AC\overline{C};$
AC
$0 \quad \overline{A + B}$

$\overline{A}\ \overline{B}$
$A\ \overline{A}$

$(B\overline{A}+B\overline{B})\left[C\overline{C}+C(\overline{A+B})\right]$

$B\ \overline{A}\ C\ \overline{A}\ \overline{B}$

$B\overline{B} = 0$

kivonási szabály
de Morgan képlet,

disztributiv törvény

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Milyen kapcsolatban vannak egymással a A, B, C események, ha kielégitik az

$$ABC = A$$

összefüggést?

2. Egy viztárolót három csapon keresztül lehet megtölteni vizzel. Jelölje A eseményt azt, hogy az első csapon át folyik a viz, B eseményt azt, hogy a második csapon folyik, C pedig azt, hogy a harmadik csapon. Fogalmazzuk meg szavakkal a következő eseményeket!

a) $A + B + \overline{C}$	g) $\overline{A} + B + C$
b) $A + B + C$	h) $A + \overline{B + C}$
c) ABC	i) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
d) $\overline{ABC}$	j) $B + C + \overline{A}$
e) $\overline{AB}C$	k) $A - BC$
f) $\overline{A + B + C}$	l) $AB - C$

3. Egy szállodában három lift szállitja a vendégeket. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik ($i = 1, 2, 3$) lift nem müködik. Fejezzük ki eseményalgebrai jelölésekkel a következő eseményeket!

   a) Csak az első lift nem müködik
   b) mindhárom lift nem müködik
   c) mindegyik lift müködik
   d) csak egy lift nem müködik
   e) legfeljebb egy lift nem müködik
   f) legalább egy lift nem müködik
   g) az első és a második nem müködik, a harmadik müködik
   h) az első és a második biztosan müködik

4. Igazak-e a következő összefüggések?

   a) $AB - C = (A - C)(B - C)$
   b) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   c) $(A - B) - C = A - (B + C)$
   d) $(A - B)(C - D) = AC - (B + D)$
   e) $(A + B)(A + C)(B + C) = AB + AC + BC$
   f) $A + B + C = (A - B) + (B - C) + (C - A) + ABC$

4. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

4.1 Kombinatorika

4.1.1 A kombinatorika a véges sok elemet tartalmazó halmazok elméleteként definiálható. Feladata, hogy módszert adjon az adott utasításnak megfelelő összes csoportok felsorolására és e csoportok számának megállapitására.

4.1.2 Permutációk

Ha egy n elemü halmaz elemeit minden lehetséges módon elrendezzük, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz elemeit permutáljuk. Ha a halmaz elemei mind különbözőek, akkor ismétlés nélküli permutációkról beszélünk, ha az elemek között egyenlők is szerepelnek, akkor ismétléses permutációkról van szó. Az n elemü halmaz ismétlés nélküli permutációjainak száma:

$$P_n = n!$$

Az n elemü halmaz - k azonos elemmel - ismétléses permutációjainak száma:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!} \quad P_n^{k_1, k_2, k_3 \dots k_s} = \frac{n! \dots}{k_1! k_2! k_3! \dots k_s!}$$

4.1.3 Variációk

Ha n különböző elemből k elemet választunk ki ($k < n$) és ezeket az összes lehetséges sorrendben felirjuk, akkor az n elem k-ad osztályu ismétlés nélküli variációit kapjuk meg.

Az n elem k-ad osztályu ismétlés nélküli variációinak száma:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Az n elem k-ad osztályu ismétléses variációinak száma:

$${}^{i}V_n^k = n^k$$

4.1.4 Kombinációk

Ha n különböző elemből ugy választunk ki k elemet, minden lehetséges módon, hogy a csoportok legalább egy elemükben különbözzenek egymástól, akkor k-ad osztályu kombinációkat nyerünk.

Az n elem k-ad osztályu ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Az n elem k-ad osztályu ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

FELADATOK

1. Hány olyan hatjegyü telefonszámot alkothatunk a 2, 3, 5, 6, 7, 9 számjegyekből, amelyben a második jegy 3-as?

Megoldás

Miután a 3-as helye rögzitett, a feladat felfogható ugy is, hogy a 3-ast .... a csoportositandó elemek, számjegyek közül, a megmaradó 5 számot pedig minden lehetséges .... felirjuk. — kivesszük; sorrendben

Ezután a 3-ast a különböző csoportok 2. és 3. jegyei .... beirjuk. — közé

Ezzel a közéirással változik-e az eredetileg kapott csoportok száma? .... — nem

Miután nem változott, most már az a feladatunk, hogy a 2, 5, 6, 7, 9 jegyek minden lehetséges .... meghatározzuk. — sorrendjét

A minden lehetséges sorrend számának meghatározását .... végezhetjük. — permutálással

Ismétlődnek-e a permutálandó elemek? .... — nem

Tehát .... permutációval számolunk. — ismétlés nélküli

A keresett megoldás tehát

$$P_5 = ... = 120$$ — $5! = 5.4.3.2.1$

2. Hányféle sorrendben ülhet 20 ember
   a) egy sorban,
   b) egy kerek asztal mellé
   c) egy kerek asztal mellé ugy, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerüljön. (Minden ember különböző magasságu.)

Megoldás

a) Van-e valami megkötés a sorrendre? .....
Egymástól különbözik-e mindegyik ember? .....
Tehát egymástól különböző, vagyis ismétlés nélküli, 20 ember sorbaállításának lehetőségeit kell számolnunk. Erre érvényes az .... számitás. Erre érvényes képlet

$$P_n = ...$$

A példa szerint n = ...

Jelöljük ki a végeredményt! ....

(Kiszámolva 10^{18} nagyságrendü számot kapunk!)

b) Ez az előzőtől abban különbözik, hogy a sorrendre megkötés ..., az, hogy körré zártuk.
Hány helyen lehet egy 20 emberből álló kört megnyitni? ...
A megnyitással "sort" kapunk, amelyben az elhelyezkedési lehetőségek száma az előzőek alapján: ....

Mivel a körré zárással 20 lehetőségtől elestünk, ezzel a lehetőségek számát el kell ....
Igy már a helyes eredményhez jutunk, ezt is jelöljük ki!

....

Más uton is erre az eredményre jutunk. Gondoljuk meg azt, hogy ha a sorban az

nincs

igen

ismétlés nélküli permutáció

n!

20

$P_{20} = 20!$

van

20

$P_{20} = 20!$

osztanunk

$$\frac{P_{20}}{20} = \frac{20!}{20} = 19!$$

1. számu (vagy bármelyik számu) embert az első helyre (vagy bármelyik helyre) rögzitjük, a többi 19-et most .... féleképpen ültethetjük le.	$P_{19} = 19!$
Ha körben ülnek, ez annyit jelent, hogy a többi viszonyitott helyét vizsgáljuk egy .... helyhez viszonyitva.	rögzitett
Tehát az elhelyezkedések lehetőségének számolásánál csak a többi ... ember helye érdekes, vagyis az eredmény	19 19!
c) Ez a "b"-től abban különbözik, hogy .... rögzitünk két egymás melletti helyre.	2 embert
A megmaradt 18 elhelyezésének lehetősége az előzőek szerint	18!
Eltekinthetünk-e a kiválasztott 2 ember egymáshoz viszonyitott helyétől?	nem
Hányféle sorrendben ülhet a két ember?	2! = 2
Tehát a kiválasztott két ember 2-féleképpen, a többi pedig 18! féleképpen. Ezért a helyes eredmény ugy kapjuk, ha ezt a két számot	összeszorozzuk
Vagyis a végeredmény = ...	2. 18!

3. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt - ha 13 mérkőzésre tippelünk - ugy, hogy 8 darab 1-es, 2 darab x-es és 3 darab 2-es tipp legyen rajta?

Megoldás

A csoportositandó elemek száma (8 db 1-es, 3 db 2-es, 2 db x) .... az elemekből összeállitandó csoportok .... számával.	egyenlő elemeinek
Tehát a feladat .... számitással oldható meg.	permutáció

ismétlődnek

ismétléses permutáció

permutálandó

13

ismétlődésének

3

k_1, k_2, k_3

8

3

2

$\frac{13!}{8!3!2!}$

$\frac{13.12.11.10.9}{3!2!} =$

$= 13.11.10.9$

A permutálandó elemek között vannak azonosak, tehát az elemek ....

A feladatot .... -val oldjuk meg.

Az ismétléses permutáció képlete:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots k_s} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!},$$

ahol n = ... elemek száma, példánkban

n = ...

A k_1, $k_2 \dots k_s$ jelölés különböző ismétlődő elemek .... számát jelentik.

Miután a képletben az ismétlődések faktoriálisainak szorzata szerepel, érdektelen, hogy melyik elem ismétlődését jelöljük k_1, k_2 stb.-vel.

Példánkban ...-féle ismétlődő elem van, tehát a képletben csak a .... kerül helyettesitésre.

Rendeljük k_1-t az 1-esekhez, k_2-t a 2-esekhez, k_3-t az x-ekhez. Akkor

$k_1 = \dots$

$k_2 = \dots$

$k_3 = \dots$

Képletbe helyettesitve kapjuk:

$$P_{13}^{8,3,2} = \dots\dots\dots$$

A kapott eredményt tovább egyszerüsitve

$$P_{13}^{8,3,2} = \dots\dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots\dots = 12870$$

4. Egy dobozban két sárga golyó van. Hány darab piros golyót kell a dobozba tennünk, ha azt kivánjuk elérni, hogy a dobozban levő összes golyókat egymás után kihuzva, 21 különböző sorrend legyen lehetséges? (Az azonos szinü golyókat nem különböztetjük meg.)

Megoldás

Az elemek kihuzásának minden lehetséges sorrendjét .... számitással határozhatjuk meg.	permutáció
Miután az azonos szinü golyókat egymásközt nem különböztetjük meg, ezek a huzás során	ismétlődnek
Igy a feladatot .... -val oldjuk meg.	ismétléses permutáció
Piros golyók száma ismeretlen, vegyük fel n-re a permutálandó elemek számának tehát (a dobozban levő összes golyók száma):	n+2
A huzás folyamán a sárga golyó ... -szer a piros golyó ... -szer ismétlődik.	2 n

Kapott adatainkat az ismétléses permutáció képletébe helyettesitjük!

$$P_n^{k_1, k_2 \dots k_s} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$$

ahol: n = a .... elemek száma példánkban	permutálandó
n = ...	n + 2
A $k_1, k_2 = k_s$ jelölés a különböző ismétlődő elemek .... számát jelentik.	ismétlődésének
A képletben az ismétlődések faktoriálisainak szorzata szerepel, tehát érdektelen, hogy melyik elem ismétlődéseit jelöljük k_1, k_2 stb.-vel. Példánkban ... féle ismétlődő elem szerepel. Tehát a képletbe csak a .... értékeit helyettesitjük.	2 k_1, k_2

n

2

$\frac{(n+2)!}{n!\,2!}$

$(n+1)\ (n+2)$

$(n+2)\ (n+1)$

5

-8

5

$\frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot 6}{2}$

Rendeljük k_1-et a piros, k_2-t sárga golyókhoz, akkor

$k_1 = \ldots$

$k_2 = \ldots$

Adatainkat a képletbe helyettesitve kapjuk:

$$P_{n+2}^{n,2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 21$$

Az $(n+2)! = n! \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Helyettesitést és egyszerüsitést elvégezve kapjuk:

$$21 = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n!}{n!\;2!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Beszorzás és átrendezés után az $n^2 + 3n - 40 = 0$ másodfoku egyenletet kapjuk, innen

$n_1 = \ldots$

$n_2 = \ldots$

A feladatnak csak az $n = \ldots$ megoldás felel meg.

Ellenőrizzük a megoldást:

7 elem ismétléses permutációja, ha
2 és 5 egymással megegyező elem van

$P_7^{2,5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 21, tehát jó a megoldás.

5. Ha adott különböző elemek számát 2-vel csökkentjük, a lehetséges ismétlés nélküli permutációk száma $\frac{1}{12}$ részére csökken.

Mennyi volt az elemek száma?

<u>Megoldás</u>

Vegyük az eredeti elemek számát n-re, akkor a 2-vel csökkentett elemek száma ....

n-2

Az eredeti elemek ismétlés nélküli permutációinak száma

$$P_n = \ldots$$

n!

Csökkentett elemek permutációinak száma

$$P_{n-2} = \ldots\ldots$$

(n-2)!

A feladat alapján írhatjuk, hogy

$$n! = \ldots\ (n-2)!$$

12

Egyenletünket átrendezve kapjuk: .... = 12

$\frac{n!}{(n-2)!}$

A faktoriálisok kifejtése alapján írhatjuk, hogy

$n! = n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ és

$(n-2)! = (n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$

$(n-2)(n-3)\ldots.\ 1$

Ezt behelyettesítve és egyszerüsítve

$$12 = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{(n-2)\ (n-3)\ldots\ldots 1} = \ldots\ldots$$

n(n-1)

Az $n(n-1) = 12$ egyenletet megoldva kapjuk

$$n_1 = \ldots, \qquad n_2 = \ldots.$$

4 3

Feladatunknak csak az n = ... felel meg, mivel ..... számpárral nem helyes az eredmény.

4

más

Ellenőrizzük a kapott eredményt:

a) Eredeti elemek száma = 4
   Csökkentett elemek száma = ...

2

b) Eredeti elemek permutációja
   $P_4 = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$4! = 24$

   Csökkentett elemek permutációja
   $P_2 = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$2! = 2$

c) 24 = ..., tehát jó a megoldás

12 . 2

6. A könyvtár egyik olvasója két könyvet választ egy könyvespolcról. Ezek sorrendjét is megkülönböztetve, 2862 lehetősége van olvasmányai megválasztására. Hány könyv van ezen a polcon?

Megoldás

Az olvasónak a két könyv választásának sorrendjét is megkülönböztetve n = ... lehetősége van olvasmányai kiválasztására.

$n = 2862$

Mint emlitettük két könyvet szándékozik csak kiválasztani, jelöljük ezt k-val k= ....

$k = 2$

A probléma mivel a választás sorrendjét is megkülönböztetjük ....-számitással oldható meg.

variáció

Egy-egy könyv többször nem fordulhat elő, ezért .... variációk számát kell kiszámitanunk, mégpedig n-elem ..... osztályu variációknak a számát.

ismétlés nélküli k-ad

A megismert képlet alapján:

$$V_n^k = \dots\dots\dots\dots$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_n^2 = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots 1}{(n-2)(n-3)\dots\dots 1} = \dots\dots\dots = 2862$$

$n(n-1)$

Tehát megoldandó egyenletünk a következő:

....

$n(n-1) = 2862$

átalakitva:

$$n^2 - n - 2862 = 0$$

Az egyenlet gyökei

$$n_{1,2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1 \pm 107}{2}$$

Csak a pozitiv megoldást figyelembe véve

$$n = \dots\dots$$

$n = 54$

Tehát 54 könyv van a polcon.

7. Egy sakkversenyen 12 sakkozó vesz részt. Körmérkőzést játszanak, mégpedig ugy, hogy minden pár kétszer mérkőzik, másodszor a világos és sötét szinekkel forditva küzdenek. Hány mérkőzésre kerül sor a versenyen?

Megoldás

Mivel a mérkőzéssorozaton mindenki mindenkivel játszik, figyelembe kell venni .... esetet.

minden lehetséges

A sakkozók ugyanazon szinekkel nem ismételhetnek játszmát, ezért .... nélküli kombinatórikai összefüggést kell használnunk.

ismétlés

A sakkozó párok a második fordulóban szint cserélnek, igy a párok egymás ellen .... játszanak.

különböző sorrendben

Ezek szerint a mérkőzések számát .... száma adja.

ismétlés nélküli variációk

A sakkozók létszáma n=12, a kiválasztott csoportok k = ...

k=2

Irjuk fel a n elem k-ad osztályu ismétlés nélküli variációinak számát

$$V_n^k = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Helyettesitsük be az összefüggésünkbe:

$$V_{12}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)!} =$$

$$= 12.11 = 132$$

elemet
csoportok

sorrendje

variációk

ismétléses

37, 3

$37^3 = 50\ 653$

8. Rulettjátéknál egy játszmában 37 számozott hely valamelyikén áll meg a golyó.

Hányféle eredménye lehet három játszmának, ha ezt egy háromtagu csapat játszsza?

Megoldás

Minden egyes számozott hely egy-egy .... jelent, amelyből alakulnak a hármas ....

Mivel három különböző játékos alkotja a csapatot, nem mindegy, hogy melyik, melyik számot nyerte. Igy azok különböző .... is, más-más esetnek számit.

Ennek megfelelően .... számának meghatározását kell elvégeznünk.

Egy-egy szám többször is előfordulhat három guritás között, ezért .... variációról beszélünk.

Igy n = ..., elem k = ... -ad osztályu ismétléses variációinak száma

$$^{i}V_n^k = n^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. Adott a sikban 10 általános helyzetü pont (azaz nincs olyan egyenes, amely az adott pontok közül 2-nél többön átmegy). Hány olyan egyenes van, amely az adott pontok közül kettőn átmegy?

Megoldás

Egy egyenes meghatározásához két pont szükséges és elégséges.

Milyen esetben lehet 3 ponton át egy egyenest huzni? ....
....
....
....

Ha a 3-ik pont a 2 pontot összekötő egyenesbe esik

Ekkor azonban a pont már ..... általános helyzetü.

nem

Esetünkben 10 általános helyzetü pont van. Az elemek számát a .... jelenti.

10 pont

Ebből hány elemet kell egyszerre kiválasztanunk az egyenes meghatározásához? ....

kettőt

A kiválasztott két elem sorrendjére ...... vagyunk tekintettel.

nem

Megállapithatjuk tehát, hogy 10 elem másodosztályu ....
.... van szó.

ismétlés nélküli kombinációjáról

Irjuk fel az általános képletet: ....

$C_n^k = \binom{n}{k}$

A számadatokat helyettesitsük be a képletbe:

.... =

= ....

$C_{10}^{2} = \binom{10}{2} = \frac{10.9}{1.2} = 45$

Tehát az adott pontok száma ... egyenest határoznak meg.

45

10. Magyar kártyából 5 lapot osztunk valakinek. Hányféle változat adódhat, ha csak a szineket vesszük figyelembe?

Megoldás

A magyar kártya lapjait szinek szerint 4 csoportba oszthatjuk. Minden csoportba 8-8 lap kerül. A 4 csoportból kell 5 db kártyát kiválasztanunk minden lehetséges módon. A kiválasztás a sorrendtől független. Ezt a kiválasztást a kombinatórikában .... nevezzük. Előfordulhatnak-e azonos szinü kártyák a kiválasztott 5 db-ban? ...., mivel a szinek ismétlődnek (4 szinből 5 lapot kell huzni), ... kombinációról beszélünk, melyet a ${}^{i}C_{n}^{k}$ = ... képlettel számithatunk. Az n jelenti az .... számát, melyből választanunk kell. Példánkban a négyféle szinből választhatunk, igy n = ... A k jelenti az .... számát, vagyis a kiválasztott elemek számát. Ez esetünkben k = ... Az i betü az ismétlésre utal. Igy fenti képlet alkalmazásával

$$ {}^{i}C_{4}^{5} = \binom{4+5-1}{5} = \ldots\ldots = $$

$$ = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = 8.7 = 56 $$

Tehát a kártya 4-féle szinü lapjaiból 5 lapot szin szerint 56 féleképpen választhatunk ki.

kombinációnak

Természetesen előfordulhatnak

ismétléses

${}^{i}C_{n}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$

elemek

n = 4

osztály

k = 5

$\binom{8}{5}$

11. Kilenc ember csónakázni készül. Három csónak áll rendelkezésükre. Az egyik négy-, a másik három-, a harmadik kétüléses. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat? Egy csónakon belül a helyek sorrendje nem számit.

I. Megoldás

Tételezzük fel, hogy először a négyszemélyes csónakot foglalják el. Mivel a sorrend nem számit ez C_9^4 féleképpen lehetséges, azaz ... elem ...... osztályu .... van szó.

Maradt a két csónakra ..... ember. Nézzük meg most azt, hogy a 3 személyes csónakban hányféleképpen lehet őket elhelyezni. Ez, analóg az előzőhöz, ... féleképpen lehetséges.

A maradék két személy pedig az utolsó csónakba ül. Az összes lehetőségek számát a fenti .... választási lehetőség .... adja.

Képlettel:

$$.................... =$$

$$= .... = \frac{9.8.7.6.5.}{3.2.2} = 1260$$

II. Megoldás

Tegyük fel, hogy indulás előtt minden résztvevő megkapja a csónakja számát. Felállitjuk őket valamilyen sorrendben és kiosztunk közöttük ... db 1-est .... db 2-est, és ... db 3-ast.
A feladat igy .... számitással megoldható feladat. Mivel a számokat tetszőleges sorrendben kioszthatjuk, ... van szó. A lehetséges esetek száma tehát:

$$P_9^{4,3,2} = ... = 1260$$

9 4-ed
-kombinációjáról

öt

C_5^3

két szorzata

$$C_9^4 \cdot C_5^3 = \binom{9}{4}\binom{5}{3} =$$
$$= \frac{9!}{5!4!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$$

4 3
2
permutáció

ismétléses
permutációról

$$\frac{9!}{4!3!2!}$$

5

kombinációjáról

C_7^5

az öt

mindenki, mindenkivel

$P_5 = 5!$

$C_7^5 \cdot P_5 = \binom{7}{5} \cdot 5! =$

$= \frac{7!}{5!\,.\,2!}\,5!$

fiuk

5 7

7

6

5 4

3

szorzata

7.6.5.4.3

12. Egy társaságban 7 fiu és 5 leány van. Hányféleképpen alakulhat belőlük 5 egyszerre táncoló pár?

I. Megoldás

A lányok mindenképpen táncolnak. A 7 fiuból egyszerre csak ... táncolhat. Mivel a sorrend nem számit, 7 elem 5-öd osztályu .... van szó.

Képlettel felirva: ....

Ha kiválasztottuk a táncoló párokat, s a lányok bizonyos sorrendben felálltak, akkor .... fiu bármely sorrendben felállhat, azaz .... táncolhat ....

A sorrend tehát .... - féleképpen képzelhető el.

Az összes lehetőségek száma tehát

....

.... = 2520

II. Megoldás

Az öt lány mindenképpen táncol. Tehát valamilyen sorrendben felállitva őket, az a kérdés, hogy hányféleképpen kérhetik fel őket a ......

Az alapállás tehát: ... lány és .... fiu

Az első lányhoz ... féleképpen választhatunk fiut, a másodikhoz ..., a harmadikhoz ...., a negyedikhez ..., az ötödikhez pedig ... féleképpen. Az összes lehetőségek számát az előzőek .... adja. Tehát .... = 2520

13. Vivóedzésen 15 vivóból 6 pár viv egyidejüleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?

A feladat megoldható a véges sok elemet tartalmazó halmazok elemeinek bizonyos utasitás szerinti csoportositásával foglalkozó .... és az algebrai összefüggések felhasználásával.

kombinatórikai

I. megoldás

Ha 15 vivóból pástra lép 6 pár, akkor nem viv ... fő.

3

Az n = 15 vivóból ("elemből") minden lehetséges módon a k = 3 fős csoport - tekintet nélkül a kiválasztott különböző emberek sorrendjére - az ....-ra érvényes összefüggés alapján

ismétlés nélküli kombináció

C_n^k = ... féleképpen választható ki.

$C_{15}^3 = \binom{15}{3}$

A pástra lépő 12 vivóból az első párt - az előzőekben rögzitett gondolatmenethez hasonlóan - az .... alapján

ismétlés nélküli kombináció

.... féleképpen

$C_{12}^2 = \binom{12}{2}$

állithatjuk össze; a második párt a megmaradó 12-2 = 10 főből .... módon; a harmadikat

$C_{10}^2 = \binom{10}{2}$

.... főből ....;

8.... $C_8^2 = \binom{8}{2}$

a negyediket ... főből .... ;

6.... $C_6^2 = \binom{6}{2}$

az ötödiket .... főből .... ;

4.... $C_4^2 = \binom{4}{2}$

mig a hatodikat ... főből .... féleképpen választhatjuk ki.

2.... $C_2^2 = \binom{2}{2}$

Ha a vivópárok kiválasztási sorrendjét is figyelembe kellene venni, akkor a kiválasztási lehetőségek szorzata

$C_{15}^{3} \cdot C_{12}^{2} \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2} \cdot$

$\cdot C_{6}^{2} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{2}^{2}$

osztani

ismétlés nélküli permutáció

6!

$$\frac{C_{15}^{3} \cdot C_{12}^{2} \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2} \cdot C_{6}^{2} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{2}^{2}}{P_6}$$

$$\frac{\frac{15!}{2!\,12!} \cdot \frac{12!}{2!\,10!} \cdot \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{2!\,0!}}{6!}$$

135 135

7

6 1

- mint események - .... adná a lehetséges esetek számát, mely egyenlő a

....

.... szimbólikus összefüggéssel.

Ha nem vesszük figyelembe a vivópárok kiválasztási sorrendjét, ugy a 6 pár vivó lehetséges elrendezésének számával, az előzőekben meghatározott szimbólikus összefüggést .... kell. A 6 vivópár lehetséges elrendezésének számát az

....

.... -ra vonatkozó összefüggés alapján lehet meghatározni, mely egyenlő a $P_6 = ...$ értékével.

Az előzőek alapján a vivópárok kiválasztásának lehetséges számát a következő szimbólikus kifejezés határozza meg:

....

behelyettesitve

....

....

és megoldva a vivópárok kiválasztása .... féleképpen lehetséges

II. megoldás

A 15 fő vivó ... csoportba osztható, melyek közül ... játszópárt alkot, mig ... csoportba kerülnek azok, akik nem vivnak.

A nem játszók csoportján belül levő, valamint a vivópárokat alkotó személyek csoportonként azonos tulajdonságokkal rendelkeznek (pl.: valaki a vivópárok csoportjába tartozik, azok közül is a harmadikba), igy felfoghatók a vivópárokon belül, illetve a nem játszók csoportjában levő személyek olyan "elemként", melyeknek tulajdonságaik azonosak.

A 15 főből azonos tulajdonságokkal biró elemek (személyek) száma tehát mind a hét csoport figyelembevételével: ....

2; 2; 2; 2; 2; 2; 3;

Ha a vivópárok és nem játszók csoportjának kiválasztási sorrendjétől nem tekintünk el, ugy 15 főből - a meghatározott azonos elemek (személyek) figyelembevételével - az

....

......................................-ra

érvényes összefüggés alapján:

ismétléses permutáció

......................................=

= .... féleképpen vá-

laszthatók ki a vivópárok, illetve a nem játszók csoportjai.

$$P_{15}^{2;2;2;2;2;2;3} = \frac{15!}{(2!)^6 . 3!}$$

A feladat értelmében nem kell tekintettel lenni a vivópárok kiválasztási sorrendjére, igy a hat csoport lehetséges elrendezéseinek számával .... kell a már kiszámitott összefüggést, mely meghatározható az ....

......................................-ra

érvényes képlet felhasználásával ....

osztani

ismétlés nélküli permutáció

$P_6 = 6!$

Ezen értékekkel osztva - azon lehetőségek számát, melynek kiszámitásánál figyelembe vettük a kiválasztási sorrendet - a következő összefüggést kapjuk: ....

....

$$\frac{P_{15}^{2;2;2;2;2;2;3}}{P_6} = \frac{15!}{(2!)^6 . 3! . 6!}$$

135 135

Egyenletünket megoldva megállapitható, hogy a 15 vivóból a 6 pár vivó .... féleképpen választható ki.

14. Az őrszolgálati egységből egyszerre 4 ember áll őrségen. Hány főből áll az őrszolgálati egység, ha őrségre 1365-féleképpen lehet 4 őrt kiválasztani?

A feladat megoldható az algebrai és a véges sok elemből álló halmazok elemeinek bizonyos utasitás szerinti csoportositásával foglalkozó .... összefüggések felhasználásával.

kombinatórikai

Az őrszolgálati egység létszámából vezényelt 4 fő őrség meghatározásakor nem vagyunk tekintettel az őrséget adók kiválasztásának sorrendjére, igy az őrszolgálati egység létszámának kiszámitásához a ....-ra vonatkozó összefüggést használhatjuk fel.

kombináció

Az őrszolgálati egység különböző emberekből tevődik össze, tehát számitásunkat az .... kombinációra érvényes meggondolások alapján végezhetjük el.

ismétlés nélküli

Az ismétlés nélküli kombináció jelölésére

a .... szimbólumot használjuk,

$C_n^k = \binom{n}{k}$

melynek kifejtett alakja a következőknek megfelelően irható fel:

....

....

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$

$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k.(k-1)\dots 2.1}$

Az összefüggésben:
- az őrszolgálati egység létszámát az ... betü;
- a 4 fős őrséget a ... betü;
- a 4 őrszem kiválasztásának 1365-féleképpen lehetséges változatait pedig a ...... szimbólum jelöli.

n

k

C_n^k

Összefüggésünk behelyettesitését követően:

$C_n^k = C_n^4 = \dots\dots = $

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$1365 =$

$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$

melynek rendezett alakja a következő formában irható fel: .... =
= ....

$32\ 760 =$
$= n(n-1)(n-2)(n-3)$

Algebrai összefüggés n értékének meghatározására.

I. számu megoldás

Egyenletünk megoldható próbálgatással, mivel négy közel egyforma szám szorzatából vont negyedik gyök megközeliti a keresett számot, melynek értelmében:
....

$\sqrt[4]{32\ 760} = 13,4$

Felfelé kerekitve és az algebrai összefüggésbe visszahelyettesitve a kerekitett értéket irható, hogy ....=
= ....

$14(14-1)(14-2)(14-3) =$
$= 24\ 024$

A kiszámitott szám az egyenlet bal oldalánál ...., igy eggyel nagyobb számot választva és az előző behelyettesitést megismételve: ....=
= .... mely érték
.... mivel az egyenlő az egyenletünk baloldalával.

kisebb

$15(15-1)(15-2)(15-3) =$
$= 32\ 760$
megfelelő

Számitásaink végkövetkeztetéseként megállapitható, hogy az őrszolgálati egység létszáma: ... fő.

15

II. számu megoldás

Egyenletünk megoldható az algebrai összefüggések felhasználásával is.

Összefüggésünk (............ =
= ....)
jobb oldalának első és utolsó, valamint két középső tagját összeszorozva:
....
az igy kapott szorzat tagjaiban az $x = n^2-3n$ transzformációt elvégezve; a következő egyenlet irható fel: ....

$32\ 760 =$
$= n(n-1)(n-2)(n-3)$

$(n^2-3n)(n^2-3n+2)$

$32\ 760 = x(x+2)$

Az összefüggésünket nullára rendezve
.... és a

$x^2+2x-32\ 760 = 0$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x_{1;2} =$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4.1.32\,760}}{2.1}$$

$x = 180$

$x=n^2-3n = 180$

$n^2-3n-180 = 0$

$n_{1,2} =$

$$=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.(-180)}}{2.1}$$

15

$$\frac{15(15-1)(15-2)(15-3)}{4.3.2.1} =$$

$= 1\,365$

helyes

$x_{1;2}$ = ...

másodfoku egyenletek megoldó képletét behelyettesitve .... =

= .... - a negativ mint nem értelmezhető megoldás figyelmen kivül hagyásával - a keresett érték: ....

"x" értéket az x = ... egyenletbe visszahelyettesitve, és nullára rendezve irható, hogy

....

A másodfoku egyenletek megoldóképletének behelyettesitéssel $n_{1,2}$ = ...

....

és megoldásával - a negativ érték elhanyagolása esetén - az őrszolgálati egység létszáma ... fő.

Ellenőrzés

A kiszámitott őrszolgálati egység létszámának negyedosztályu, ismétlés nélküli kombinációja:

C_{15}^{4} = ... =

= ....

mely érték megegyezik a feladatban meghatározott kiválasztási lehetőségek számával, tehát megoldásunk ....

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Hány szó képezhető a Budapest szó betüiből? (40 320)

2. Hány szó képezhető a Debrecen szó betüiből? (6720)

3. Egy 20 tagu testület hányféleképpen választhat meg tagjai közül 3 tagu elnökséget? (1140)

4. Hányféle módon tölthető ki egy lottó szelvény? (43 949 268)

5. Egy 25 tagu társaság elnököt, titkárt és jegyzőkönyvvezetőt választ. Hányféleképpen teheti ezt meg? (13 800)

6. A gépkocsik forgalmi rendszámának betüjelében a latin ábécé 24 betüjéből kettő, nem szükségképpen különböző betüt használnak. Hányféle betüjel képzelhető el? (576)

4.2 Valószínűségszámítás lényeges alapfogalmai és tételei

4.2.1 Események valószinüsége

Ha egy n-szer megismételt kisérlet folyamán, A esemény k-szor következik be: akkor a $\frac{k}{n}$ hányadost képezve, az A esemény bekövetkezésének jellemzésére használt relativ gyakoriságot kapjuk. A relativ gyakoriságok többször megismételt kisérletsorozat esetén egy meghatározott szám körül ingadoznak, amely értéket az A esemény valószinüségének nevezünk, s a következőképpen jelöljük:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

4.2.2 Az események valószinüségére a következő axiómák igazak:

I. $O \leq P(A) \leq 1$

II. $P(O) = O$; $P(I) = 1$

III. $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots\ldots + P(A_n)$

ha $A_i A_j = O \quad i \neq j$

4.2.3 A 4.2.2-ből következnek az alábbi összefüggések

I. Ha $A \subset B$
akkor $P(A) \leq P(B)$

II. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

III. Ha $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ teljes eseményrendszert alkot
$P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1$
Speciális esetben:
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

4.2.4 Klasszikus valószinüségalgebra

Ha egy kisérletnek véges sok kimenetele lehet, s az egyes kimenetelek (események) azonos valószinüséggel következnek be, akkor a kisérlet kimenetelei és ezeknek valószinüségei klasszikus valószinüségi mezőt alkotnak.
Jelölve:

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots\ldots\ldots = P(A_n)$$

$A_1, A_2, \ldots A_n$ események a kisérlet egyes kimenetelei, amelyek egyébként teljes eseményrendszert alkotnak.

4.2.5 Geometriai valószinüségek

Ha egy kisérlet kimenetelei olyan események, amelyek egy geometriai alakzat részhalmazainak (részalakzatainak) feleltethetők meg, az eseményekhez rendelt valószinüséget geometriai valószinüségnek nevezzük.

Jelölve:

M a teljes geometriai alakzat,

m a részalakzat mértéke

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

4.2.6 Feltételes valószinüség

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{ha } P(B) \neq 0$$

definiciót jelenti A esemény - B esemény bekövetkezésének feltételéhez kötött - bekövetkezések valószinüségét.

A kifejezés átalakitható és ebből a két esemény szorzatának valószinüsége számitható

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B)$$

4.2.7 A teljes valószinüség tétele

Ha $B_1, B_2 \ldots. B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, valamint $P(B_i) \neq 0$ $i=1,2,\ldots n$, akkor a következő összefüggés érvényes $P(A)$ valószinüségre:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$$

4.2.8 Bayes-tétele

Ha $B_1, B_2 \ldots B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B_i) \neq 0$ $i=1,2,\ldots n$, valamint $P(A) \neq 0$ A tetszőleges eseményre, akkor igaz a Bayes-tétel, amely a következő:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

4.2.9 Események függetlensége

Az A és B eseményt egymástól független eseménynek nevezzük, ha igaz

$$P(A|B) = P(A)$$

ugyanakkor igaz

$$P(B|A) = P(B)$$

A és B függetlenségének szimmetrikus definiciója:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Több esemény függetlenségét a következő alakban irhatjuk fel:

$A_1, A_2 \dots A_n$ eseményekből tetszőlegesen kiválasztva

$k(k = 2, 3 \dots n)$ számu $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_k}$ eseményt, igaz a következő

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

FELADATOK

1. a) Egy sorban m ember ül le. Mi a valószinüsége annak, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül, ha az emberek különböző magasságuak és minden sorrend egyformán valószinü?

b) Számoljuk ki m = 20 esetére is!

Megoldás

a) Jelöljük A-val a példában megadott eseményt. Ennek valószinüségét megkapjuk, ha a .... esetek számát osztjuk az .... esetek számával. — kedvező / összes lehetséges

Vagyis képletben: .... — $P(A) = \frac{k}{n}$

k jelenti tehát azokat az eseteket, amikor a legmagasabb és a legalacsonyabb

.... — egymás mellé kerül

n pedig jelenti: .... — az összes lehetséges sorrendet

....

Az n értékét könnyü kiszámitani. Ha különböző emberek sorba állitásáról van szó, akkor .... szerint számolunk. — ismétlés nélküli permutáció

Ezek szerint n = ...! — $m!$

A k értékéhez gondoljuk meg azt, hogy egy ember mindig egy másik mellett kell álljon, mégpedig .... féle sorrend szerint. Tehát egy ember helye rögzitett a többi pedig .... féle sorrendet foglalhat el. — $2! = 2$; $(m-1)!$

Ezek szerint k = ... — $2.(m-1)!$

Tehát A esemény valószinüsége:

$P_{(A)} =$ .... — $\frac{k}{n} = \frac{2.(m-1)!}{m!}$

$(m-1)!$

$P(A) = \frac{2}{m}$

$P_{(A)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Egyszerüsitsünk most ....-sal.

A végeredmény tehát: ....

b) Helyettesitsük be az m=20 értéket!

....

kedvező
összes lehetséges

$P(A) = \frac{k}{n}$

egymás mellé kerül

az összes lehetséges sorrendet

$P_m = m!$

$(m-1)!$

$n = (m-1)!$

2. a) Egy kerek asztal körül m különböző magasságu ember ül le. Mi a valószinüsége annak, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül, ha az emberek különböző magasságuak, és minden sorrend lehetséges?

b) Számoljuk ki m = 20 esetére is!

Megoldás

a) Jelöljük A-val a példában megadott eseményt. Ennek valószinüségét megkapjuk, ha a .... esetek számát osztjuk az .... esetek számával.

Vagyis képletben: ....

k jelenti tehát azokat az eseteket, amikor a legmagasabb és a legalacsonyabb

....

n pedig jelenti .... egy kerek asztal körül.

Jelöljük ki először n értékét. Ehhez tudnunk kell, hogy m embert, akik különböző magasságuak egy "sorban" .... féleképpen helyezhetünk el.

Ha körbe zárjuk a sort, ez annyit jelent mintha egy ember helyét rögzitettük volna, marad tehát .... lehetőség.

Az n értéke tehát: ....

A k értékét a következő gondolatmenettel számoljuk: |
--- | ---
Két ember egymás mellett .... féle sorrendben ülhet. | $2!=2$
Ennek a két embernek a helye .... marad tehát még m-2 ember, ezek ..... féleképpen helyezkedhetnek el. | rögzitett $(m-2)!$
Tehát ha ezeket a lehetőségeket ...., kapjuk a helyes értéket, vagyis .... | összeszorozzuk $k=2.(m-2)!$.
Tehát A esemény valószinüsége, $P_{(A)}=$ .... | $\frac{k}{n}=\frac{2.(m-2)!}{(m-1)!}$
Egyszerüsitsünk most ....-sal! | $(m-2)!$
Igy kapjuk a végeredményt: .... | $P_{(A)}=\frac{2}{m-1}$
b) Helyettesitsük be az m = 20 értéket: .... | $P_{(A)}=\frac{2}{19}$

3. 14 db külsőre teljesen egyforma dobozolt konzerv között 6 romlott van. Mekkora annak valószinüsége, hogy a konzervek közül találomra kivett 6 doboz mindegyike jó?

Megoldás

A konzervek közül .... választhatunk.	egyenlő valószinüséggel
A jó konzervek kiválasztásának .... valószinüségét ezek szerint .... számitással tudjuk meghatározni.	klasszikus valószinüség

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

összes
és a lehetséges

egyszer

ismétlődést

ismétlés nélküli
kombinációja

$C_{14}^{6} = \binom{14}{6}$

8

$C_{8}^{6} = \binom{8}{6}$

hányadosa

$$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{14}{6}} =$$

$$= \frac{\frac{8}{6!\ 2!}}{\frac{14!}{6!\ 8!}} = \frac{4}{429} =$$

$= 0,093$

A számitáshoz ismernünk kell az ....
.... esetek számát.

Egy dobozt hányszor emelhetünk ki?
....

Tehát a választásnál az ....
kizárjuk.

Az összes doboz közül a 6 doboz kiválasztását, mivel a sorrend nem számit, 14 elem 6-od osztályu ....
.... adja.

Képlettel: ....

A kiválasztott dobozoknak azonban jónak kell lenniök, igy a kiválasztás már csak ..... doboz közül történik.

A jó konzervek kiválasztási lehetőségei tehát: ....

A kiválasztás valószinüségét a lehetséges és összes esetek számának .... adja.

A kiválasztás valószinüsége tehát:

= ....

= ....

= ....

4. 100 termékből, amely között 10 selejtes termék van, találomra kiválasztunk 5-öt. Mennyi a valószinüsége, hogy a kiválasztott darabok között 2 selejtes van? A feladatot

a) visszatevés nélküli mintavétellel;
b) visszatevéses mintavétellel;
is meg kell oldani.

Megoldás

A mintavételek módjai különbözőek lehetnek, melyeknek azonban két alapvető formája a .... illetve, a .... mintavétel	visszatevés nélküli visszatevéses
A visszatevés nélküli mintavétel folyamán egyszerre vagy egyenként vesszük ki a minták elemeit az alapsokaságból, de a kihuzottakat a teljes minta kivétele előtt	nem helyezzük vissza
A visszatevéses mintavétel során a kivett minta elemeit azok felülvizsgálatát követően .... az alapsokaságba, az ujabb mintaelem kivételét megelőzően.	visszahelyezzük
Feladatunk szerint az alapsokaság N = ... db elemet tartalmaz, melyből ... db selejtes. Az alapsokaságból találomra kiválasztott minta n = ... db-ból áll. A mintában $P(A_k) = P(A_2)$ valószinüséggel k = ... db selejtes, ahol A_2 jelöli azon eseményt, hogy az ... elemü mintából ... termék selejtes	100 10 5 2 5 2
A két feladat a .... és a .... összefüggéseinek felhasználásával oldható meg.	kombinatorikai valószinüségszámitás

a) feladat megoldása:

Az n db mintaelem kihuzása, illetve megvizsgálása egy lehetséges kimenetel - az az egy elemi esemény - melyeknek száma annyi, ahány ... elemü minta az ... alapsokaságból kiválasztható.	n N

Az elemek kivétele során nem kell tekintettel lenni azok sorrendjére, nem helyezzük vissza a kihuzott elemet a teljes minta kivétele előtt; igy az elemi események száma a kombinatorikából ismert ....

ismétlés nélküli kombináció

.... felhasználásával meghatározható; melynek szimbolikusan kifejezett összefüggése; N alapsokaság és n mintaelem szám mellett:

$$C_N^n = \binom{N}{n}$$

....

A következőkben azon elemi események számát kell kiszámitani, melyek meghatározzák, hogy hány ... db-os selejtet tartalmazó huzás fordulhat elő.

k

Az s db selejtes alkatrész közül a k db selejtes - az előzőekben rögzitett kombinatorikai meggondolásnak megfelelően - az

ismétlés nélküli kombináció

....
.... összefüggésének felhasználásával szimbolikusan jelölve:

$$C_s^k = \binom{s}{k}$$

.... féle módon választható ki.

A megmaradó ...... jó alkatrészek közül az ...... jó alkatrész ....

N-s

n-k $C_{N-s}^{n-k} = \binom{N-s}{n-k}$

féleképpen választható ki.

Azon elemi események száma tehát, mely meghatározza az n elemü, k darab selejtes alkatrészt tartalmazó minták lehetséges változatait, egyenlő a C_s^k, illetve C_{N-s}^{n-k} kombinációk ....

szorzatával

Számitásaink eredményeként - a valószinüségszámitás klasszikus meghatározásának felhasználásával - annak valószinüsége, hogy az n elemü mintából k termék selejtes, a következő szimbolikus képlettel fejezhető ki:

$P(A_k) = ...$

$$\frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Behelyettesitve összefüggésünket:

$P(A_2) = ...=$

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{100-10}{5-2}}{\binom{100}{5}} =$$

$= ....$

$$= \frac{\frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot \frac{90!}{3!(90-3)!}}{\frac{100!}{5!\,(100-5)!}}$$

illetve kiszámitva megállapitható, hogy visszatevés nélküli mintavétel esetén a megadott feltételek mellett az 5 elemü minta 2 selejtest .... valószinüséggel tartalmaz.

0,0702

b) feladat megoldása:

Az elemi események száma, melyek meghatározzák, hogy az n elemü minta hányféleképpen választható ki az N alapsokaságból - figyelemmel az elemek kivételének sorrendjére, valamint azon lehetőségre, hogy egy alkatrész többször is kihuzható - kiszámitható az .... összefüggésének felhasználásával, mely szimbolikus jelöléssel:

....

ismétléses variáció

$^{i}V_N^n = N^n$

A következőkben azon elemi események számát kell kiszámitani, melyek meghatározzák, hogy hány ... db-os selejtet tartalmazó huzás fordulhat elő az ... elemi minta esetén.

k

n

Azon elemi események száma, melyeknél az első k huzás eredménye selejtes termék, a többi .... huzás eredménye pedig jó alkatrészekből áll, kiszámitható - az előzőekben megjelölt kombinatorikai gondolatmenet alapján - az .... felhasználásával.

n-k

ismétléses variáció

Ha az első k huzás eredménye selejtes, illetve a többi n-k huzás eredménye jó, ugy az s selejtes termékek ... -ad, illetve az N-s jó alkatrészek .... -ad osztályu ismétléses szorzata

$$ {}^{i}V_{s}^{k} \cdot {}^{i}V_{N-s}^{n-k} = $$

$$ = s^{k} \cdot (N-s)^{n-k} $$

$$ s^{k} \cdot (N-s)^{n-k} $$

az ismétlés nélküli kombináció

$$ C_{n}^{k} = \binom{n}{k} $$

$$ \binom{n}{k} s^{k} \cdot (N-s)^{n-k} $$

$$ \binom{n}{k} \frac{s^{k}(N-s)^{n-k}}{N^{n}} $$

cióinak .... képezi az elemi események számát, tehát

.... =

= ....

A továbbiakban meg kell határozni az előzőekben megjelölt elemi események számán tulmenően mindazokét, melyek bármilyen sorrendben tartalmaznak k selejtes terméket.

Rögzitsük gondolatban a k selejtes termék helyét, az n mintában és az esetben - az előző gondolatmenethez hasonlóan - minden rögzitett k helyhez .... elemi esemény tartozik.

A k selejtes hely az n mintában .... alapján - szimbolikus

jelöléssel .... féleképpen-választható ki, igy azon elemi események száma, melyek meghatározzák az n elemü k darab selejtes alkatrészt tartalmazó minták lehetséges változatáit:

....

Végkövetkeztetésként - a valószinüségszámitás klasszikus értelmezésének felhasználásával - annak valószinüsége, hogy az n elemü mintából k darab selejtes - a következő szimbolikus összefüggéssel fejezhető ki:

$P(B_k)$ = ...

Behelyettesitve az összefüggésünket:	
$P(B_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =$	$\binom{5}{2}\frac{10^2(100-10)^{5-2}}{100^5} =$
$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$= \frac{5!\,.\,10^2\,.\,90^3}{2!(5-2)!\,.\,100^5}$
illetve kiszámitva megállapitható, hogy visszatevéses mintavétel esetén a megadott feltételek mellett az 5 elemü minta 2 selejtest .... valószinüséggel tartalmaz.	0,0729

5. Egy négyzet alaku, 5 m oldalhosszuságu bunkert 1 m vastag betonlemez fed. Egy találat 60 cm mélyre hatol és 1 m sugaru bombatölcsért okoz. A bunker elpusztul, ha egy 2. találat az elsőnek a helyétől legfeljebb 1 m-re csapódik be. Mi a valószinüsége, hogy a második találat elpusztitja a bunkert, ha az első találat olyan pontra esett, amely a fedél szélétől 2, ill. 3 méternyire van?

Megoldás

Ha egy eseménnyel kapcsolatban az eseményeket geometriai alakzat részhalmazának feleltethetjük meg ugy, hogy az egyes események valószinüsége az eseményhez rendelt részhalmaz geometriai mértékével arányos, akkor az események valószinüségei geometriai valószinüségi mezőt alkotnak. Tehát egy A esemény geometriai valószinüsége

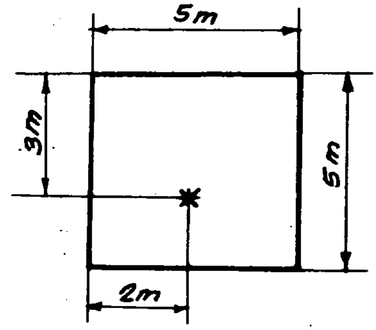
$$P(A) = \frac{m}{M},$$

ahol m = az A eseménynek megfelelő geometriai .... mértéke	alakzat
M = a szóba jövő teljes	geometriai
.... mértéke.	alakzat

érdektelen

Rajzoljuk fel alaprajzban a bunkert és jelöljük be a bomba becsapódási pontját is. A példa szempontjából ...., hogy a fedél melyik szélétől mérjük a 2, ill. 3. métert.

Így rajzunk pl. a következőképpen alakulhat:



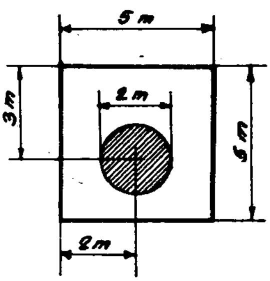
nem
igen

A bunker elpusztul, ha a 2. bomba az 1. becsapódási pontjától legfeljebb 1 m-re csapódik be. A legfeljebb 1 m lehet-e
1, 5 m? ...... Lehet-e
0, 7 m? ......

1 m belül

A legfeljebb 1 m tehát azt jelenti, hogy a 2. bomba becsapódási pontja köré rajzolt .... sugaru körön .... csapódik be.

Rajzoljuk be ezt a kört az ábrába:



területe

Egy geometriai alakzat mértékét a geometriai alakzat .... is reprezentálhatja.

A bunker elpusztulását A eseménnyel jelölve és a geometriai valószinüség képletét felhasználva, vagyis

$$P(A) = \frac{m}{M},$$

ahol m = ... területe

M = ...
....

Az értékeket behelyettesitve kapjuk

P(A) = ... = 0,1256

illetve .... %

1 m sugaru kör

a bunker alapterülete

$\frac{1 \cdot \pi}{25}$

12,56

---

6. Bizonyos elektronikus gépben számos azonos alkatrész van. A gép vásárlásakor pótalkatrészeket is beszerezhetünk, darabonként 1000 Ft-ért. Az alábbi táblázat szerint ismerjük a gép várható élettartamán belüli alkatrészcsere valószinüségeit.

Cserélendő alkatrészek száma: B_j	valószinüsége $P(B_j)$
0	0,6
1	0,2
2	0,1
3	0,1
	1,0

Ha alkatrészt kell cserélni és a pótalkatrész nem áll azonnal rendelkezésre, akkor az alkatrész beszerzése 3500 Ft darabonkénti költséget jelent. (Ez a rendelésből, szállitásból a gép állásidejéből stb. adódik.) Kiszámitandó a géppel együtt vásárolt pótalkatrészek optimális száma.

négy
nem, egyet, kettőt, hármat

négy

0, 1, 2, 3

igen

egy
kettő
1000+3500 =
= 4500 Ft

valószinüséggel
$P(B_j)$

4500 . 0, 1 =
= 450 Ft

mátrix

7,0 10,5

Megoldás

Feltételezésünk szerint maximum 3 alkatrész hibásodhat meg, tehát döntésünket illetően .... féle változatnak van értelme, azaz ......, ..., ..., vagy .... veszünk a pótalkatrészből.

A négyféle döntés mellett, ugyancsak ...... változata van a hibásodás bekövetkezésének is, azaz ..., ..., ..., vagy .... alkatrész megy tönkre.

Jelöljük a vásárolt alkatrészek számát A_i-vel ($i = 0, 1, 2, 3$).

Kérdés, hogy adott A_i és B_j értékekhez tartozó várható költséget ki tudják-e számitani? ....

Számitsuk ki például $A = 1$ és $B = 2$ esetében először a két tényezőtől függő költséget. ..... alkatrészt vásároltunk előre, de .... hibásodott meg, tehát a költségráforditás ....=
= ....

A költség várható értékét megkapjuk, ha azt megszorozzuk az eseményhez tartozó
....
.........-vel.

Az eredmény: ....=
= ....

Módunkban van tehát a változó A_i és B_j értékeknek megfelelő döntési .... felirása, melynek tagjai a megfelelő költségeket jelentik e Ft-ban.

Géppel együtt vásárolt alkatrészek száma: A_i	Szükséges alkatrészek száma B_j			
	$B_1=0$	$B_2=1$	$B_3=2$	$B_4=3$
$A_1=0$	0	3,5	...	....

$A_2 = 1$ ... ...

$A_3 = 2$ ... ...

$A_4 = 3$ ... ...

Egy adott döntéshez, azaz A_i értékhez tartozó várható költségszintet $M(A_i)$-t megkapjuk, ha a hozzátartozó költségeket (C_{ij}) a megfelelő .... értékkel szorozzuk.

$M(A_i)$ = ...

A behelyettesitéseket és számitásokat elvégezve kapjuk, hogy

$M(A_1)$ = ...+
+ ....

$M(A_2)$ = ...+
+ ....

$M(A_3)$ = ...+
+ ....

$M(A_4)$ = ...+
+ ....

Az optimális megoldást a .... várható értékü változó adja. Példánkban ez az .... változat, vagyis a géppel együtt ..... db pótalkatrészt helyes vásárolnunk.

1.0	1.0	4.5	8.0
2.0	2.0	2.0	5.5
3.0	3.0	3.0	3.0

valószinüségi, $P(B_j)$

$$\sum_{i-1}^{4} C_{ij} \cdot P(B_j)$$

0.0, 6+3, 5.0, 2+7.0, 1+
+10, 5.0, 1=2, 45

1.0, 6+1.0, 2+4, 5.0, 1+
+8.0, 1=2, 05

2.0, 6+2.0, 2+2.0, 1+
+5, 5.0, 1 = 2, 35

3.0, 6+2.0, 2+3.0, 1+
+3.0, 1= 3, 00

legkisebb

A_2

egy

7. Egy háromszinü nyomtatvány siknyomással ugy készül, hogy egy iv ugyanazon a gépen háromszor végigfut. Az egyes szinek nyomása egymástól független. A gép termékeinek 5%-a egy-egy szin nyomásakor selejtes. Mi a valószinüsége, hogy egy iv két-, ill. három szinből is selejtes nyomásu lesz? Mi a valószinüsége annak, hogy egy kiválasztott iv selejtes legyen?

Megoldás

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy az első szin nyomása selejtes, B jelenti, hogy a .... szin nyomása selejtes és .... jelenti, hogy a .... szin selejtes.

második
C harmadik

Hogyan jelöljük, hogy három eseményből legalább az egyik bekövetkezik? ....
És azt, hogy két, ill. három esemény együttesen bekövetkezik? ....

A+B+C

AB ill. ABC

Tudjuk, hogy két egymástól független esemény közül legalább az egyik bekövetkezésére a P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB) érvényes.

Hogyan jelöljük ki annak valószinüségét, hogy egy kiválasztott iv selejtes lesz?
...................................+
+.................................. -
- ....

P(A+B+C) = P(A)+
+P(B)+P(C)-P(AB)-
- P(AC)-P(BC)+P(ABC)

Segitő kérdés: Ehhez annak kell bekövetkeznie, hogy a három szin nyomásakor legalább az .... szin nyomása selejtes lesz.

egyik

A kiszámitáshoz még tudnunk kell azt is, hogy független események esetén
P(AB) = ...

P(A) . P(B)

Ezek után helyettesitsük be a kijelölt egyenletet
P(A+B+C) = ...=
= ....
számitsuk ki! ....

P(A+B+C)=3.0,05-
-3.0,0025+0,000125
P(A+B+C)=0,142625

Tehát annak a valószinüsége, hogy egy kiválasztott iv selejtes lesz .... %-os.	14, 26
Vegyük észre, hogy az előbbi számolásnál $P(AB)=[P(A)]^2$ és $P(ABC)=$	$[P(A)]^3$
Jelöljük ki azt az eseményt, hogy egy iv legalább két szinből selejtes:	$AB+AC+BC$
A számolás megkönnyitésére vezessük be azt, hogy $AB=K$, $AC=L$ és $BC=M$.	
Jelöljük ki annak valószinüségét, hogy egy iv legalább két szinből selejtes: ....+ + ...- -	$P(K+L+M)=P(K)+P(L)+$ $+P(M)-P(KL)-P(KM)-$ $-P(LM)+P(KLM)$
Tudjuk, hogy $P(K)=P(AB)=(P(A)^2=0,0025$, $P(KL)=$ .... és $P(KLM)=$	$0,0025^2$, ill. $0,0025^3$
Látjuk, hogy P(KL), P(KM), P(LM) és P(KLM) a P(K)-hoz képest kis érték, ezért ezek a tagok	elhanyagolhatók
Igy a keresett valószinüség: ....= = ...	$3.0,0025=0,0075=$ $=0,75\%$
Hogyan jelöljük azt, hogy egy iv mindhárom szinből selejtes?	ABC
Jelöljük ki ennek valószinüségét! ....= = ...	$P(ABC)=P(A).P(B).P(C)=$ $=(P(A)^3$
Számitsuk ki! ....= = ...	$0,05^3=0,000125=$ $=0,0125\%$

8. Egy kétgyermekes családban tudjuk, hogy az egyik gyerek fiu. Mi a valószinüsége, hogy a másik gyerek is fiu?

Megoldás

Jelöljük A_1-el azt az eseményt, hogy az egyik gyerek fiu egy kéttagu családban és A_2-vel azt az eseményt, hogy a másik gyerek is fiu. Az A_2 esemény valószinüségét az A_1 bekövetkezése mellett vizsgáljuk, tehát az A_2 bekövetkezésének .... az A_1 bekövetkezése.

feltétele

A feladat tehát, most már jelöléseinkkel fogalmazva:

mi az A_2 esemény bekövetkezésének ....

az A_1 esemény ....

esetén.

valószinüsége

bekövetkezése

Feladatot tehát a .... valószinüségre vonatkozó képlettel oldjuk meg.

feltételes

Vagyis $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

vagy szavakban az A esemény B esemény .... melletti valószinüsége egyenlő az A és B esemény .... bekövetkezésének valószinüségével.

bekövetkezése

együttes

Az előzőekben elmondottakat végiggondolva, jelöléseink a képletben szereplő jelöléseknek a következőképpen feleltethetők meg:

A = ... B = ...

A_2 A_1

Ezt behelyettesitve kapjuk:

$P(A_2|A_1)$ ....

$\frac{P(A_2A_1)}{P(A_1)}$

Vizsgáljuk meg a $P(A_2A_1)$ és a $P(A_1)$ valószinüségeket. Ehhez először meghatározzuk, hogy egy kétgyerekes családban a születések sorrendjét is figyelembe véve (mivel az első és a második gyerek is lehet fiu) a nemek szerinti eloszlás szempontjából milyen egyenlő valószinüségi eseteket lehet megkülönböztetni. 4 ilyen eset van:

ff f.... ....

Miután a 4 eset ff fl lf ll egyenlő valószinüségü a $P(A_1)$ a .... képlettel számitható, vagyis

$$P(A_1) = \frac{k}{n},$$

ahol k = ... esetek száma
n = ... esetek száma

A kedvező eset a keresett valószinüség szempontjából az az eset, amikor .... fiu van.

Ezt figyelembe véve

$$P(A_1) = \frac{k}{n} = ...$$

A $P(A_2A_1)$ meghatározásához először meg kell vizsgálnunk, hogy mit jelent az A_2A_1 esemény:

Két esemény szorzata az események .... bekövetkezését jelenti.
Az A_2A_1 esemény tehát azt jelenti, hogy egy kétgyermekes családban .... gyerek ....

Most már, szintén a klasszikus képletből

$$P(A_2A_1) = \frac{k}{n} = ...$$

Igy

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2A_1)}{P(A_1)} = ... = \frac{1}{3}$$

l lf ll

klasszikus

kedvező
lehetséges

legalább 1

3/4

együttes

mindkét
fiu

1/4

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

9. 3 gép egyforma alkatrészeket gyárt azonos darabszámban. Az alkatrészeket egy dobozban gyüjtik. Az első két gép 3%-os selejtszázalékkal dolgozik, mig a harmadik 6%-os selejtaránnyal. Mi a valószinüsége, hogy a dobozból selejtes alkatrészt veszünk ki?

Megoldás

Jelöljük A-val azt az eseményt, ha a dobozból selejtes alkatrészt választunk ki.

Jelentse B_1 esemény azt, ha az első két gép alkatrészei közül választunk, B_2 pedig azt, hogy a .... gép termékei közül.

a harmadik

Ezen események valószinüségére rendelkezünk adatokkal is, igy

$$P(B_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(B_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(B_2) = \frac{1}{3}$$

Az egyes gépek nem azonos selejtszázalékkal dolgoznak, ezért a selejt kiválasztási valószinüsége gépenként más. (Első két gépnél azonos.)

Tehát az első két gép alkatrészei közül más valószinüséggel választhatunk selejtest, mint a harmadik gép által gyártott termékek közül. Ezt feltételes valószinüséggel fejezhetjük ki:

$$P(A|B_1) = 0,03$$

$$P(A|B_2) = \ldots\ldots\ldots$$

$$P(A|B_2) = 0,06$$

Miután megvizsgáltuk a rendelkezésünkre álló adatokat, felirhatjuk a teljes valószinüség tételét, amely segitségével választ adhatunk a feladatban feltett kérdésre.

A teljes valószinüség tétele:

.... =

= ....

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Irjuk fel ismételten a rendelkezésre álló és a számoláshoz szükséges adatainkat.

....

....

....

....

$P(B_1) = \frac{2}{3}$

$P(A|B_1) = 0,03$

$P(B_2) = \frac{1}{3}$

$P(A|B_2) = 0,06$

Adatainkat behelyettesitve összefüggésükbe:

$P(A) = P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) =$

= .... =

= ....

$= \frac{2}{3}.0,03+\frac{1}{3}0,06=$
$= 0,04$

Ezek után válaszolhatunk a kérdésre. Tehát .....% a valószinüsége, hogy a dobozból selejtes alkatrészt választunk.

4

10. 100 db uj rádió között egyforma valószinüséggel lehet 0, 1, 2 vagy 3 selejtes (több nem!). Tiz darabot találomra kiválasztva közülük, megvizsgáljuk és jónak találjuk. Mennyi a valószinüsége, hogy mind a 100 készülék hibátlan?

Megoldás

Jelentse B_i (i=0, 1, 2, 3) azt az eseményt, hogy 100 db készülék között i darab selejtes. Ebből következik, hogy B_1 azt jelenti, hogy

....

....

100 közül 1 selejtes

Mivel a feladat szerint egyforma valószinüséggel fordulhat elő, hogy 0, 1, 2 vagy 3 selejtes, felirhatjuk ezeknek a valószinüségeknek az

....

egyenlőségét

Irjuk fel betüjelekkel ezt az egyenlőséget. ....=

= ....

$P(B_0) = P(B_1) =$
$= P(B_2) = P(B_3)$

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a megvizsgált 10 készülék jó.

Példánkban A esemény már bekövetkezett? .... A esemény bekövetkezésének a feltétele mellett melyik esemény valószinüségét keressük? ....

igen

$P(B_0)$

Irjuk le betüjelekkel! .. ..

$P(B_0 | A)$

Megcserélve a két betüt $P(A|B_0)$ jelenti A valószinüségét, feltéve, hogy a B_0 esemény már ....

bekövetkezett

Ha a 100 db közt nincs selejtes, A esemény biztosan bekövetkezik.
Ezért $A|B_0$ .... esemény.

biztos

Ebből következik $P(A|B_0) =$ ....

1

Feladatunkban B_0, B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkotnak és $p(B_i) \neq 0$ és $P(A) \neq 0$ ezért alkalmazhatjuk a keresett valószinüség megoldására a .... tételt.

Bayes

Tehát $P(B_0 | A) =$ ....=

= ....

$$\frac{P(A|B_0)\,P(B_0)}{\sum_{i=0}^{3} P(A|B_i)\,P(B_i)} =$$

$= P(B_0 | A)$

Még $P(A|B_i)$ valószinüséget kell meghatározni.

Ha 100 termékből i selejtes, a jó termékek száma: ....

100 -i

Kiválasztottunk visszatevés nélkül véletlenszerüen 10 elemet és az jó. Alkalmazhatjuk a .... mintavételre vonatkozó képletet.

visszatevésnélküli

Igy $P(A|B_i)$ .... $\dfrac{\binom{100-i}{10}}{\binom{100}{10}}$

A képletbe helyettesitve:

$P(B_0|A)$ = ... $\dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{3} \dfrac{\binom{100-i}{10}}{\binom{100}{10}}} =$

= .... $= \dfrac{\binom{100}{10}}{\sum\limits_{i=0}^{3} \binom{100-i}{10}}$

---

11. Egy szerszám készülhet elsőosztályu és másodosztályu anyagból. 40% készül a jobbik minőségü anyagból. Ha a szerszám első osztályu anyagból készült, akkor megbizhatósága (vagyis) a hibamentes müködés valószinüsége T időre 0,95. Ha másodosztályu anyagból készült, akkor megbizhatósága: 0,70. Egy találomra választott szerszámot kipróbálták és T időn keresztül hiba nélkül müködött. Mennyi a valószinüsége, hogy a kipróbált szerszám első osztályu anyagból készült?

Megoldás

Jelöljük B_1-el azon eseményt, mely szerint a szerszám első osztályu anyagból készül. B_2 jelentse a másodosztályu anyagból történő gyártást. A szerszámok csak első és másod osztályu anyagból készülhetnek, igy B_1 és B_2 .... eseményrendszert alkot. teljes

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a találomra kiválasztott T időn át hibátlanul mü-

	ködő szerszám első osztályu anyagból készült, mely esemény bekövetkezése függvénye a teljes eseményrendszer ....
egyes eseményeinek	Feladatunkat ezek után ugy is megfogalmazhatjuk, hogy a teljes eseményrendszer egyes eseményei milyen szerepet játszottak az A esemény bekövetkezésében; mennyi a B_1 esemény A esemény bekövetkezésére vonatkozó ....
feltételes valószinüsége	A B_1 eseménynek A eseményre vonatkozó feltételes valószinüsége meghatározható a .... tétel felhasználásával, melynek szimbolikus jelölésekkel kifejezett alakja:
Bayes	
$P(B_k \mid A) =$	..................................=
$= \dfrac{P(B_k)\, P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)(P(A \mid B_i))}$	= ....
B_1 .... B_2	A teljes eseményrendszer egyes eseményeit az előzőekben már ..... és ......-vel jelöltük, mig bekövetkezésük valószinüségét .... és .... jelentse.
$P(B_1)$ .... $P(B_2)$	
0,4	A B_1 esemény bekövetkezésének valószinüsége $P(B_1)$ = ..., mig a B_2 esemény bekövetkezésének valószinüsége - figyelemmel a B_1; B_2 események által meghatározott teljes eseményrendszerre - ....
$1-P(B_1)$	
$1-0,4 = 0,6$	melynek számszerü értéke: ....
	Az A eseménynek a teljes eseményrendszer egyes eseményeire vonatkoztatott feltételes valószinüsége:
$P(A \mid B_1) = 0,95$	- első osztályu anyagból történő szerszámkészités esetén: ....

- másod osztályu anyag felhasználásakor:	$P(A\|B_2) = 0,70$
Az első osztályu anyagból készült szerszámok mint esemény A eseményre vonatkoztatott feltételes valószinüsége, Bayes tételének alkalmazásával szimbólikusan jelölve:	
$P(B_1\|A) =$	$\dfrac{P(A\|B_1)\,P(B_1)}{P(A\|B_1)\,P(B_1)+P(A\|B_2)\,P(B_2)}$
melyet behelyettesitve:	
....	$\dfrac{0,95\,.\,0,40}{0,95\,.\,0,40+0,70\,.\,0,60}$
és kiszámolva $P(B_1\|A) =$	0,475
Végkövetkeztetésként tehát megállapitható, hogy egy T időn keresztül hibátlanul müködő, találomra kiválasztott szerszám .... valószinüséggel első osztályu anyagból készült a megjelölt feltételek figyelembevétele mellett.	0,475

12. Egy kockát 6-szor egymás után feldobunk. Mennyi a valószinüsége annak, hogy a 4-es egyszer sem kerül felülre?

Megoldás

A valószinüségszámitás klasszikus képlete: $P = \frac{k}{n}$, amely szerint

k = ... kedvező esem. száma

n = ... összes esem. száma

Példánkban az összes elemi eseményt a ....-szor feldobott kocka jelenti. (6-szor)

Ha a kockát egyszer dobjuk fel az 6 elemi eseményt jelent, mert a kockának .... (6 lapja van) Ha kétszer dobjuk fel a kockát mennyi az elemi események száma?

.... (6^2)

A hatszor feldobott kocka tehát .... elemi eseményt jelent. (6^6)

Tehát n = ... (6^6)

Most vizsgáljuk a kedvező esetek számát. Négyest .... dobhatunk egyszer sem. (nem) Tehát az 1, 2, 3, 5, 6 számok közül kell 6 dobással ... elemi eseményt kiválasztani. (6) A 6 elemi eseményt ugy választjuk ki, hogy a sorrendre tekintettel vagyunk. Valamelyik szám szerepelhet-e többször a dobás eredményeként? ...... (igen)

Ezek után megállapithatjuk, hogy 5 elem 6-od oszt. .... variációjáról van szó. (ismétléses)

Képlettel kifejezve: .... ($^{i}V_n^k = n^k$)

A számadatokat behelyettesitve: .... ($^{i}V_n^k = 5^6$)

.... az események száma, amelyet a keresett valószinüség a $P = \frac{k}{n}$ képletbe helyettesitve: .... ($(\frac{5}{6})^6$)

13. Egyszerre két kockát dobunk fel 10-szer egymás után. Mennyi a valószinüsége, hogy legalább egyszer mindkét kockával 3-ast dobunk?

Megoldás

Először dobjuk fel egyszerre a 2 kockát és nézzük meg azt, hogy mi annak a valószinüsége, hogy mindkettővel 3-ast dobunk. Alkalmazzuk a valószinüségszámitás klasszikus képletét, mely igy szól: .... $P = \frac{k}{n}$

n jelenti: .... összes esetek számát

k jelenti: .... kedvező esetek számát

Két kocka egyszeri feldobásánál az összes eset száma n = ... 6^2

Kedvező eset csak akkor fordul elő, ha mindkét kockával 3-ast dobunk. Ezért a kedvező esetek száma: k = ... 1

A képletbe az értékeket behelyettesitve:

P = ... $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

A kockákat egymásután feldobva függenek-e egymástól a dobások eredményei? ..... nem

Jelöljük P(A)-val annak a dobásnak a valószinüségét, melynek eredménye két 3-as.

Ekkor P(A) = ... $\frac{1}{36}$

Ismert valószinüségszámitási tétel szerint $P(\bar{A})$-t hogy irhatjuk fel? .... 1-p(A)

Számszerüen $P(\bar{A})$ = ... $\frac{35}{36}$

Esetünkben $P(\bar{A})$ annak a valószinüségét jelenti, hogy .... nem két 3-as a dobás eredménye

Ha az első dobás eredménye nem két 3-as, valószinüségét igy jelöljük: $P(A_1) = \frac{35}{36}$.

$P(A_2) = \frac{35}{36}$

függetlenek

$P(\bar{A}_1).P(\bar{A}_2)\ldots$

$\ldots P(\bar{A}_{10})$

$\left[\frac{35}{36}\right]^{10}$

10 dobás közül egyszer sem kapunk két 3-ast

legalább 1-szer kapunk

$1 - \left[\frac{35}{36}\right]^{10}$

Ha a második nem két 3-as:

....

Tételezzük fel, hogy a 10 dobás közül egy sem hármas. Mivel az események egymástól .... a 10 esemény együttes bekövetkezését igy jelölhetjük, alkalmazva a független események szorzási szabályát:

$P(\bar{A}_1.\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{10}) =$ ....

... .

Helyettesitsük be az értékeket:

....

Az igy kiszámitott valószinüségi érték annak a valószinüsége, hogy ....

....

....

Ennek mi a komplementere? ....

....

Igy a keresett valószinüség $\left[\frac{35}{36}\right]^{10}$ komplementere: ....

14. Egy üzemben 500 férfi és 300 nő dolgozik. A férfiak között 50, a nők között 90 személy szakképzetlen. A fenti adatok alapján milyen következtetést vonhatunk le a két esemény függetlenségére?

Megoldás

Tekintsük A-nak azt az eseményt, hogy egy véletlenül kiválasztott ember, férfi, B-nek pedig ha nő.

Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy valaki szakképzetlen. Számitsuk ki annak valószinüségét, hogy A ill. B esemény bekövetkezése mellett hogyan alakul C esemény bekövetkezésének valószinüsége.

A C esemény A bekövetkezése melletti feltételes valószinüsége

$P(C|A) = \frac{k}{n} =$ .... $\frac{50}{500} = \frac{1}{10}$

A C esemény B bekövetkezése melletti feltételes valószinüsége pedig:

.... $P(C|B) = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$

A két esemény valószinüsége azonos-e? ..... . Ebből következik, hogy a C esemény bekövetkezésének valószinüsége függ a különböző ....

nem

feltételektől

Tehát a szakképzettség ténye ..... attól, hogy valaki férfi vagy nő.

függ

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy szövőnő 4 gépet kezel egyidejüleg. Annak valószinüsége, hogy az első gép egy órán át hibamentesen müködik 0,90, a második gép egy órán belüli hibás müködésének valószinüsége 0,05, a harmadik gép egy órán belüli meghibásodásának valószinüsége 0,08, a negyedik gépre az egy órán át való hibamentes müködés valószinüsége 0,85.

   Számitsuk ki annak a valószinüségét, hogy egy órán át

   a) mind a négy gép hibamentesen müködik (0,66)
   b) legalább egy gép hibamentesen müködik (0,99994)

2. Egy nemzetközi kongresszuson résztvevők közül 30 csak magyarul és németül, 20 csak magyarul és oroszul, 20 csak angolul és oroszul, 30 csak magyarul beszél. Két kongresszusi résztvevő egymás mellé kerül az ebédnél. Mennyi a valószinüsége, hogy tolmács nélkül is tudnak egymással beszélni? (0,758)

3. 10 db külsőre egyforma uj kerékpár közül 2 db kerékpáron egy minőségi hiba, 4 db kerékpáron 5 hiba és 3 db kerékpáron 4 minőségi hiba található. Ha a kerékpárok közül találomra választunk ki hármat, mi a valószinüsége annak, hogy a három kerékpáron összesen 11 minőségi hibát találunk. (0,1)

4. Egy autótulajdonos ki akarja nyitni kocsija ajtaját, azonban a társaságban, ahol volt, kulcsát összekeverték tréfából 4 hasonló kulccsal. Mennyi a valószinüsége, hogy k-ad -szorra kinyilik az ajtó, ha

   a) visszatevéssel választ kulcsot
   b) visszatevés nélkül választ kulcsot.

5. Három kockával dobunk. Mi a valószinüsége, hogy az egyik 6-ot mutat, azon feltevés mellett, hogy a kockák különbözőt mutatnak? (0,5)

6. Két gépen 15, illetve 20 db terméket gyártottak. Mindkét gépen 1-1 db selejtes készült. Az első gép termékei közül egyet áttettünk a második gép termékei közé, majd innen egy darabot kiválasztottunk. Mi a valószinüsége, hogy a kiválasztott darab selejtes? $\left(\frac{16}{315}\right)$

7. Budapest és Debrecen közötti táviróvonalon a leadott pontjelek $\frac{2}{5}$ -e vonallá, a vonaljelek $\frac{1}{3}$ -a ponttá torzul. A pontok és vonalak aránya 5:3. Mi a valószinüsége, hogy ha pontot értékelnek, akkor pontot is adtak le? ($\frac{3}{4}$)

8. Egy üzemben három gép müködik. A gépek a termelés 25, 35, illetve 40%-át szolgáltatják. Az első gép selejtaránya 5%, a másodiké 4%, a harmadiké 2%. A napi termelésből kiválasztunk 1 darabot és azt selejtnek találjuk. Mi a valószinüsége annak, hogy az első, a második, illetve a harmadik gép gyartotta? (0,362; 0,405; 0,233)

4.3 Fontosabb eloszlások

4.31 Binomiális eloszlás

Diszkrét eloszlás. A változónak két alternativ ismérve létezik. Jelöljük az egyik lehetséges eseményt S-sel (pl. selejtes termék) és legyen ennek valószinüsége: $P(S) = p$. Ekkor az alternativ esemény valószinüsége (pl. jó termék): $P(J) = P(\overline{S}) = 1 - p = q$.
Ha ξ binomiális eloszlást követ, akkor annak valószinüsége, hogy n kísérlet esetén (pl. n elemü mintában) a ξ valószinüségi változó pontosan k értékét vegye fel ($k = 0, 1, 2, \ldots n$) (pl. n elemü mintában k selejtes legyen):

4.311

$$P(\xi = k) = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots n$$

Eloszlásfüggvénye:

4.312

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

F(k) a $P(\xi < k)$ valószinüséget adja meg.

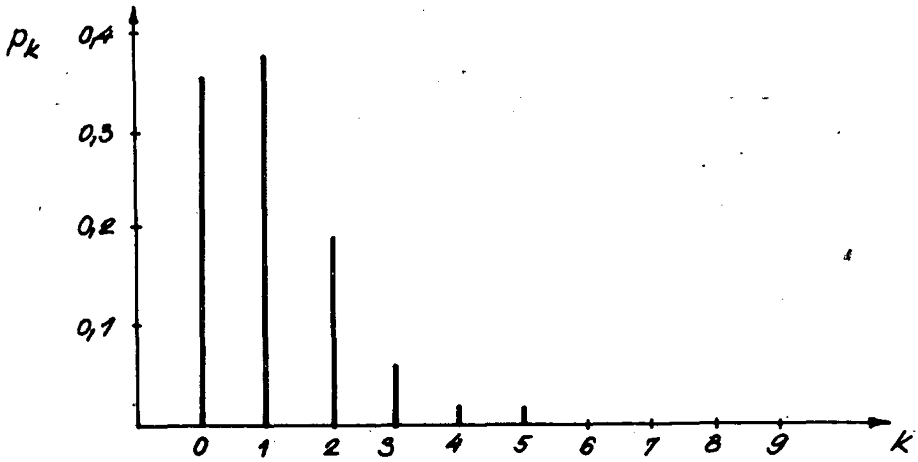
A binomiális eloszlás jellemzői:

4.313 Várható értéke: $\mu = n . p$

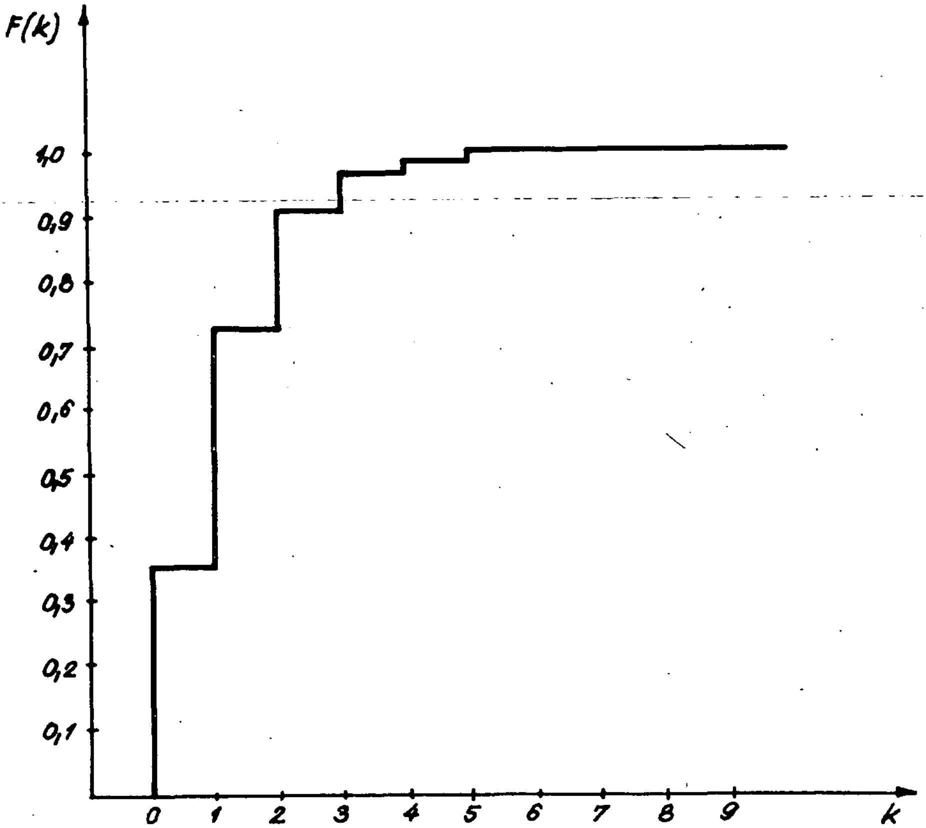
4.314 Szórása: $\sigma = \sqrt{n . p . q}$

Az eloszlás jellegzetes képét a 6. és 7. ábrák mutatják (p = 0, 05 n = 20 esetén).

A binomiális eloszlás jól közelithető Poisson-eloszlással (p=0, 10 alatt vagy p=0, 9 felett, illetve, ha $n \gg k$ és $np \equiv$ konst), vagy normális eloszlással, (ha p közel esik 0, 5-hez, vagy n eléggé nagy, illetve $np \geq 5$), amelyek számitástechnikailag sokkal könnyebben kezelhetők.



6. ábra
Binomiális eloszlás p= 0, 05 és p=20 esetén az egyes valószinüségekkel



7. ábra
Binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye p= 0, 05 és n = 20 esetén

FELADATOK

fiuk
binomiális

$p = 0,51$

$q = 1 - p = 0,49$

$n = 6$

$k = 4$

$P(\xi = 4) = P_4 =$

$= \binom{6}{4} 0,51^4 . 0,49^2 =$

$= 0,234$

6 gyermekes családban 4 fiu valószinüsége 23,4%

6	4
0,50	0,2344

1. A születések statisztikai vizsgálata szerint egy fiu születésének valószinüsége 0,51. Mi a valószinüsége annak, hogy egy 6 gyermekes családban 4 gyermek fiu, ha feltesszük, hogy egy családon belül az ujszülött neme független a többi gyermek nemétől?

Megoldás

ξ -vel jelölve a..... számát, ez a valószinüségi változó .... eloszlást követ.

Jellemzői:

p = ...

q = ...

n = ...

k = ...

Ezek alapján a megoldás képlete:

$P(\xi = ...) =$ ....=

= ....=

= ....

Mit jelent ez, fogalmazzuk meg:

....
....
....

Számitsuk az eredményt a I. táblázat segitségével!

n = ... esetén, a k = ... sorban

p = ... - nél P_4 = ...

2. Egy gyártási folyamatban előállitott termékek 5%-a selejtes. 20 elemü véletlen mintát véve, mi a valószinüsége, hogy ebben pontosan 1 db selejtes? Mi a valószinüsége, hogy legfeljebb 3 selejtes lesz?

Megoldás

1. A feladat .... eloszlással oldható meg:

$P(\underset{.....}{\quad}) = p_{....} = ...$

$= ....$

ahol

$p = ...$

$q = ... =$
$= ....$

$n = ...$

$k = ...$

binomiális

$P(\xi=1) = p_1 =$

$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$p = 0,05$

$q = 1-p=1-0,05 =$
$= 0,95$

$n = 20$

$k = 1$

---

igy $P(\underset{....}{\quad}) = ... =$

$= ....$

táblázatból, ...= ....

Tehát 20 elemü véletlen mintát véve (5% selejtarányu termékekből) annak .... , hogy 1 db selejtes: ....%.

$P(\xi = 1) =$

$= \binom{20}{1} 0,05^1 \cdot 0,95^{19}$

$p_1 = 0,3774$

valószinüsége
37,7%

2. Legfeljebb 3 selejtes valószinüségét

$P(\xi \le 3) = P(\xi < 4) = F(k) = \sum$ ....

képlet alapján számitjuk. Táblázatból

$p_0 = ...$

$p_1 = ...$

$\sum_{i=0}^{3} \binom{20}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{20-i}$

$p_0 = 0,3585$

$p_1 = 0,3774$

$p_2 = 0,1887$
$p_3 = 0,0596$
$\Sigma p_i = 0,9842$

Legfeljebb 3 selejt valószinüsége 98,4%

$p_2 = ...$
$p_3 = ...$

Fogalmazzuk meg a helyes választ:
....
....

---

csucsforgalmi

$P = \frac{3}{60} = 0,05$

legfeljebb

V előfizető

P(A) = 0,9
csucsforgalmi
0,9

pontosan V beszél
10 000 előfizető közül

$P(\bar{A}) = 0,1$

10 000

3. Egy 10 000 előfizetőt kiszolgáló telefonközpontnak csucsforgalmi órában egy előfizető részére 0,9 valószinüséggel kell szabad vonalat biztositani. Hány vonalat kell kiépiteni, ha a felmérések szerint csucsidőben egy-egy beszélgetés 3 percig tart? (A hivások egymástól függetlenek!)

Megoldás

1. Határozzuk meg, mi annak a valószinüsége, hogy .... órában egy találomra választott időpontban adott személy éppen beszél

P = ...

A kiépitendő vonalszám legyen: V

Egy hivó akkor kap vonalat, ha .... V-1 személy beszél 10 000 előfizető közül. Ez csak akkor igaz, ha legfeljebb .... beszélhet a hivás pillanatában.

A esemény jelentse azt, hogy egy előfizető a csucsforgalmi órában szabad vonalat kap.
A példa kiirásából tudjuk, hogy
P(A) = ...
vagyis a .... órában egy előfizető .... valószinüséggel kap vonalat.

Mit jelent $\bar{A}$?

$\bar{A}$ = ...
....
feltéve, ha legfeljebb V számu beszélhet

$P(\bar{A})$ = ...

annak a valószinüsége, hogy V számu előfizető beszélhet ....közül felirható:

$$P(\bar{A}) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{P (legfeljebb V számu előfizető beszél 10 000 közül)}} =$$

$$= 0,1 = \frac{P_1}{P_2}$$

Mivel egy esemény bekövetkezéséről, vagy be ..... következéséről van szó (beszél, vagy ..... beszél) a .... eloszlást használjuk

P_1 (pontosan V számu előfizető beszél 10 000 közül) =

= ....

$$P_2 = \sum_{i=0}^{\ldots\ldots} \binom{10\,000}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{10\,000-i}$$

Tehát:

$$\frac{\binom{10\,000}{V}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\sum_{i=0}^{\ldots\ldots} \binom{10\,000}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{10\,000-i}}\text{-ből}$$

számitható a V. vonalszám

(Megjegyzés: a fenti kérdés igen nagy szerepet játszik az un. Erlang-féle problémák és eloszlások esetében.)

P (pontosan V számu előfizető beszél 10 000 közül)

nem

nem binomiális

$$\binom{10\,000}{V} 0,05^V\, 0,95^{10\,000-V}$$

$$\sum_{i=0}^{V} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0,05^V \cdot 0,95^{10\,000-V}$$

$$\sum_{i=0}^{V}$$

4. Egy üzemben 169 azonos tipusu gép dolgozik azonos feltételek mellett. Az egyes gépek a munkaidő 80%-ában dolgoznak. Átlagos kapacitás terhelés mellett 140 gép a napi munkafeladatokat ellátja. Mi a valószinüsége, hogy egy adott időpillanatban legfeljebb 29 gép nem dolgozik és igy átlagos terhelés mellett a napi munkában nincs fennakadás?

Megoldás

ξ .... változó jelentse a .... gépek számát, amely .... eloszlást követ.

Annak valószinüsége, hogy egy ...... dolgozik egy .... időben

$p =$ .... és, hogy nem dolgozik

$q =$ ....

Kérdésünk tehát igy irható fel:

$P(\xi$ ....$) = 1 -$ .... $=$

$=$ ....

A számitás igy igen nehezen végezhető el, de mivel $\mu = np$ nagy, alkalmazható a .... közelités. Ekkor:

$\mu = n\cdot p =$ .... $=$ ....

$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} =$ .... $=$ ....

valószinüségi

dolgozó

binomiális

gép

adott

$p = 0,8$

$q = 1 - p = 0,2$

≥ 140, $F(140)$

$$\sum_{i=140}^{169} \binom{169}{i} 0,8^i 0,2^{169-i}$$

normális

$169\cdot 0,8$, 135

$\sqrt{135\cdot 0,8\cdot 0,2}$, $5,2$

(A TOVÁBBIAKAT A 4.33. RÉSZ UTÁN OLDJUK MEG!!)

igy (4.335 alapján):

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

a folytonossági korrekció miatt:

$$u = \frac{(x - 0,5) - \mu}{\sigma}$$

mivel $\mu = 135$, $\sigma = 5,2$ és $x =$ ....

$u =$ .... $=$ ....

a III. táblázatból $u = 0,87$-nél

$\Phi(u) = \Phi(x) =$ ....

Tehát annak valószinüsége, hogy legfeljebb 29 gép nem dolgozik

....

140

$$\frac{(140 - 0,5) - 135}{5,2} = 0,87$$

0,8087

80,87%

Tehát a feladat megoldása:

....

....

....

....

....

annak a valószinüsége, hogy egy adott időpillanatban legfeljebb 29 gép nem dolgozik 80, 8%

---

5. Egy szövőgépnél 0, 005 annak a valószinüsége, hogy bizonyos időtartam alatt egy szál elszakad. 800 szál esetén hány szál elszakadása a legvalószinübb - feltéve, hogy az egyes szálak szakadása független egymástól? Mi a valószinüsége, hogy egy adott gépnél pontosan 5 szál szakad el? Egy gépet le kell állitanunk, ha 8-nál több szál elszakad. Mi a valószinüsége, hogy az adott időtartam alatt a gépet le kell állitanunk?

Megoldás

A szálszakadás .... eloszlásu valószinüségi változó.

diszkrét

A változónak .... ismérve létezik: ....

....

két alternativ elszakad, nem szakad el

A szálszakadás tehát ....eloszlást követ, amelynek jellemzői:

binomiális

$P_k = P(\xi = k) =$ ....

$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$(k = 0, 1, \ldots . n)$

várható értéke: $\mu =$ ....;

n.p

.... : $\sigma = \sqrt{npq}$

szórása

Ez alapján:

p = ...

q = ...

n = ...

0,.005

1-p=1-0, 005=0, 995

800

szálszakadás várható	A legvalószinübb .... érték, az eloszlás .... értéke (μ).
μ=np=800.0,005=4	μ = ...= .... =............
pontosan	Annak valószinüsége, hogy .... 5 szál szakad el:
$\binom{n}{5}0,005^5 \cdot 0,995^{n-5}$	$P(\xi=5) = p_5 =$ ....=
$0,005^5 \cdot 0,995^{795}$	$= \binom{800}{5}$ ....
Poisson nagy n k kicsi, $\lambda = np$	A számitás igy nagyon nehézkes lenne, de közelithetünk .... eloszlással. Ezt akkor tehetjük, ha .... a binomiális eloszlásban .... értéke .... -hoz képest és p értéke ....; ekkor a λ = ... számot választva paraméternek, fennáll a következő összefüggés:
$\frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx$ .... $= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$\lambda = np = 4$	Tehát: λ = ... = ...
	Táblázatból: (a II. táblázat!)
$p_5 = 0,1563$	p_5 = ...
valószinüsége	Jó közelitéssel tehát 5 szál elszakadásának .... 15,6%.
	Le kell állitani a gépet, ha 8 -nál több szál szakad el.
	Kérdés: Mi annak a valószinüsége, hogy adott időtartam alatt gépet kell leállitani:
$P(\xi > 8)$	Ez P(ξ...8) eloszlás fg.-el számitható.
>8 ≤ 8	$P(\xi...8) = 1 - P$ (.... 8) =
$1 - F(k)$ 9	= 1 - ...., ahol k=......
$F(k) = \sum_{k=0}^{8} \binom{800}{k} \cdot$	$F(k) = \sum_{k=0}^{....} =$ ....
$\cdot\ 0,005^k\ 0,995^{800-k}$	. ...

Részletezve: Poisson eloszlással közelitve a II. táblázatból:

$p_0 = 0,0183$
$p_1 = \dots\dots$
$p_2 = \dots\dots$
$. = \dots\dots$
$. = \dots\dots$
$. = \dots\dots$
$. = \dots\dots$
$. = \dots\dots$
$. = \dots\dots$

$$F(k) = \sum_{k=\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots =$$

Tehát 97,8% annak a valószinüsége, hogy a gépet le kell állitani(??)

Indokolja, miért?

....

$P(\xi \dots\dots 8) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots =$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Fogalmazza meg a feladat véleménye szerinti helyes megoldását.

Tehát .... % annak a valószinüsége, hogy .... állitanunk.

$p_0 = 0,0183$
$p_1 = 0,0733$
$p_2 = 0,1465$
$p_3 = 0,1954$
$p_4 = 0,1954$
$p_5 = 0,1563$
$p_6 = 0,1042$
$p_7 = 0,0595$
$p_8 = 0,0298$

$$F(k) = \sum_{k=0}^{8} = 0,9787$$

nem jó az okoskodás!

$P(\xi > 8) = 1 - 0,9787 =$

$= 0,0213$

2,13%
gépet le kell

6. Egy konzerv tételben 20% nem megfelelő minősitésü termék található. A tételből 4 dobozt vettek ki véletlen mintavétellel. Mi a valószinüsége annak, hogy ebben a mintában 2, ill. 3 nem megfelelő konzervet találnak?

(M: $P(\xi = 2) = 0,1536$
$P(\xi = 3) = 0,0256$)

7. Adott mintavételi terv szerint egy tételből 130 elemü mintát kell vizsgálni és a tétel elfogadható, ha a mintában legfeljebb 5 selejtes darabot találunk. Milyen valószinüséggel fogadhatunk el (minősitünk jónak) egy 5%-os selejtarányu tételt?

(M: $P \cong 0,37$)

8. Egy bizonyos állatpszichológiai kisérletben az agykéreg megsértésének az emlékezőképességre gyakorolt hatását vizsgálják. A kisérleti patkányokat egy olyan labirintusba helyezik, amelyben a lehetséges 5 ut közül csak egy vezet a táplálékhoz. Rövid idő alatt az állatok megtanulják a helyes utat, azonban ezután megsértve az agykéreg egy bizonyos helyét gyógyulás után már csak az állatok kb. 20%-a találja el ezt a helyes utat. 6 patkányon végeztek kisérleteket és ha legalább 3 ezek közül rátalált a helyes utra, akkor a kisérletet ugy tekintik, hogy nem csökkent az állatok emlékezőképessége. Mi ennek az eredménynek a valószinüsége?

(M: $P(\xi \geq 3) = 0,0989$)

9. Mi a valószinüsége annak, hogy a nálunk is alkalmazott négyszámjegyes autórendszámok esetén egy találomra választott autó rendszáma legalább két hatos számjegyet tartalmaz?

(M: $p \cong 0,052$)

10. Egy üzem alkatrészellátása elmult időszaki adatok alapján egy adott napon 80%-os valószinüséggel zavartalan. Egy heti termelést vizsgálva mi annak a valószinüsége, hogy
a) pontosan négy nap zavartalan a termelés?
b) legalább öt nap zavartalan a termelés?

(M: a) $P(x=2) = 0,2458$
b) $P(x < 2) \doteq 0,6553$
x = a nem zavartalan napok száma!)

4.32 Poisson eloszlás

Diszkrét eloszlás. Tekinthető a 4.31 határesetének (ha $p \longrightarrow 0$ és $n \longrightarrow \infty$, miközben $np = \lambda$ állandó marad). Ha egy ξ valószinüségi változó Poisson eloszlást követ, akkor annak valószinüsége, hogy ξ értéke pontosan k legyen $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$:

4.321 $$P(\xi = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n)$$

ahol λ: az eloszlás paramétere, egy pozitiv állandó.

A Poisson eloszlás eloszlásfüggvénye:

4.322 $$F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$F(k)$ a $P(\xi < k)$ valószinüséget adja meg.

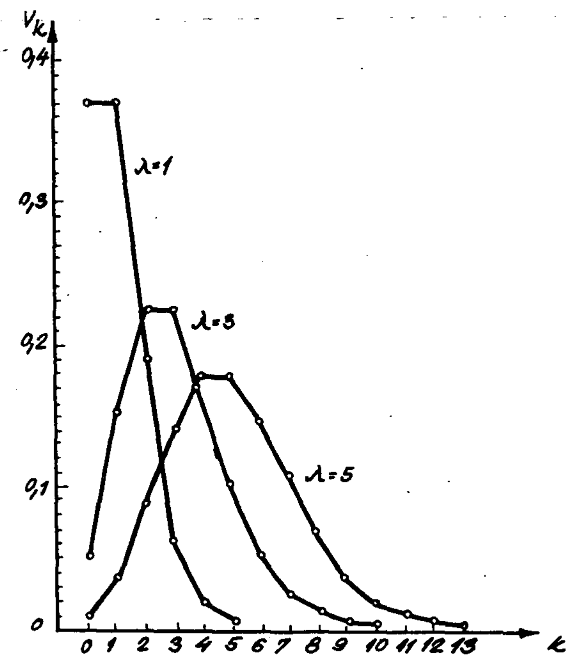
A Poisson eloszlás egyparaméteres eloszlás:

4.323 várható értéke:
$\mu = n.p = \lambda$

4.324 szórása:
$\sigma = \sqrt{\lambda}$

A Poisson eloszlás jellegzetes alakjait mutatja a 8. ábra különböző λ értékek esetén.

A Poisson eloszlás $\lambda > 15$ esetén jól közelithető a vele egyenlő várható értékü és szórású normális eloszlással.



8. ábra
A Poisson eloszlás különböző λ értéknél

FELADATOK

1. Egy 1200 oldalas matematikai példatárban 360 sajtóhiba van. Mi a valószinüsége, hogy 20 véletlenszerüen kiválasztott lapon

   a) egy sajtóhibát sem találunk?
   b) legfeljebb 10 hibát találunk?

Megoldás

A szövegben levő sajtóhibák Poisson eloszlást követnek. A Poisson eloszlás paramétere:

$n \cdot p$

$\lambda =$ ....

20

ahol: $n =$ ....

$\frac{360}{1200} = 0,3$

$p =$ .... = ...

$20 \cdot 0,3 = 6$

tehát: $\lambda =$ .... = ...

a) annak a valószinüsége, hogy 20 oldalon egy hibát sem találunk

4.31 alapján számitható:

$$P(\xi = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

0

ahol esetünkben $k =$ ....

0,0025

igy $p_o =$ ....

(a $\lambda = 6$ oszlopban, $k = 0$ sorban talált érték!)

(használjuk a II. tálázatot!)

annak valószinüsége tehát, hogy 20 oldalon egy hibát sem találunk

0,25%

.... %

b) annak valószinüsége, hogy 20 oldalon legfeljebb 10 hibát találunk

4.322 alapján számitható

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k=1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

a legfeljebb 10 igy irható:

$\xi \leqq 10$, vagy $\xi <$ .... | 11

tehát, - mivel F(k) a .... valószinüséget adja meg, k = ... | $\xi < k$ 11

F(11) = ... = | $\sum_{i=0}^{10} \frac{6^i}{i!} e^{-6}$

= .... | $\sum_{i=0}^{10} p_i$

tehát: F(11) = ...
..................................= | 0,0025+0,0149+0,0446+.....
.... | ...+0,0413 = 0,9575

(a II. táblázatot használjuk!)

Jelen esetben gyorsabban juthatunk az eredményhez, ha alkalmazzuk a következő összefüggést:

$$\sum_{i=0}^{10} p_i = 1 - \sum_{i=11}^{\infty} p_i$$

ugyanis $\lambda = 6$-nál csak i=17-ig kell összegeznünk, igy:

$\sum_{i=11}^{\dots} p_i =$ .... | 17
| 0,0225+0,0113+...
.... = | ... +0,0001
.... | 0,0425

Tehát annak valószinüsége, hogy 20 oldalon legfeljebb 10 hibát találunk:

F(11) = 1 - .... | 0,0425
.... | 0,9575

2. Tömeggyártásban előállitott öntvényekben a légzárványok átlagos száma: 2. Az öntvényekből 200 elemü véletlen mintát veszünk. Hány öntvényben találunk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 légzárványt? Mi a valószinüsége, hogy a zárványok száma legfeljebb 4? (A zárványok száma Poisson eloszlást követ!)

Megoldás

A légzárvány homogén anyagban levő hibaként értelmezhető, igy a probléma tipikusan .... eloszlást követ.

A Poisson eloszlás várható értéke $\mu = \lambda$, ami jelen esetben $\mu = \lambda =$ ....

A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 légzárvány valószinüsége a

$$P(\eta = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

összefüggésből számitható, ahol

$\lambda =$ .... és

$k =$ ....

Az értékek kiszámitását nem kell elvégezni, mivel a megfelelő táblázatot használva az értékek kikereshetők:

$p_0 =$ .... $p_4 =$ ....
$p_1 =$ .... $p_5 =$ ....
$p_2 =$ .... $p_6 =$ ....
$p_3 =$ ....

A mintanagyságot (n= ....) a kiszámitott .... szorozva az elméletileg várható értékeket kapjuk.

k	0	1	2	3	4	5	6
f	28	....					

Poisson

$\mu = \lambda = 2$

$\lambda = 2$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$p_0 = 0,1353$ $p_4 = 0,1804$
$p_1 = 0,2707$ $p_5 = 0,0902$
$p_2 = 0,2707$ $p_6 = 0,0120$
$p_3 = 0,1804$

n′= 200
valószinüségekkel

k	0	1	2	3	4	5	6
f	28	54	54	36	18	8	2

A legfeljebb 4 zárványt tartalmazó valószinüséget a p_o +......................... valószinüségek összeadásával kaphatjuk meg: (erre a célra külön táblázatot is készitettek, amely segitségével ez az érték közvetlenül is kikereshető)(Példatárunkban ez nem található)	$p_o + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
$P(\eta \leq 4) \cong$	$P(\eta \leq 4) \cong 0{,}9474 = F\|k\|$

3. Mekkora véletlen mintát kell vennünk 1% -selejtet tartalmazó termékből, hogy a mintában egy selejtes darabot legalább 0, 95 valószinüséggel találjunk?

<u>Megoldás</u>

Az eloszlás elvileg ...., de közelithetünk .... eloszlással is, mivel ... értéke 1%.	binomiális Poisson p
Keressük azt a mintanagyságot, amelyben 0, 95 valószinüséggel találunk legalább 1 selejtes darabot. Tehát	
k = ... $p_1 \geq$ .... n = ...	$k = 1 \quad p_1 \geq 0{,}95 \; n = ?$
A feladatot ugy is megfogalmazhatjuk, hogy	
k = 0 $\quad p_o \leq$	$p_o \leq 0{,}05$
A k = 1 valószinüségét a 4.321 alapján felirva	
....	$p_1 = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}$
Mivel ...... ismeretlen, ezért k = 0 értékkel számolunk, tudva, hogy	λ
$p_o \leq$	$p_o \leq 0{,}05$

$$p_o = \frac{\lambda^o}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$\lambda = n \quad 0,01$

$n \geq 300$

Igy 4.321-et $k = 0$ értékkel felirva

. . . .

Ebből

$$e^{-\lambda} \leq 0,05$$

ahol $\lambda = n \cdot p =$ . . . .

Igy $e^{-0,01\, n} \leq 0,05$

Innen

$$n \geq \ldots\ldots$$

3%

Poisson

nem megfelelő

$\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0,03 = 3$

k

4. Automata palacktöltő export konyakot tölt. A megrendelő kikötése szerint az 510/ml-nél kevesebb konyakot tartalmazó palackok aránya legfeljebb 3% lehet. Határozzuk meg optimális töltési szint esetén a 95% körüli valószinüséggel elfogadható átvételi számot (átvételi száma = a mintában megengedhető nem megfelelő darabok száma) n = 100 elemü minták esetén.

Megoldás

A gyártó szempontjából optimális a töltés, ha a nem megfelelő (510,0 ml alatti) palackok aránya: . . . . %

Az eloszlás jó közelitéssel . . . . , mivel a termék megfelelő, vagy . . . . lehet, de n értéke nagy és p értéke kicsi.
Számoljuk ki λ értékét!

$\lambda =$ . . . . = ... = ...

A megengedhető hibás darabok számát, azaz . . . . . értékét, $\lambda = 3$ esetén 95% körüli valószinüséggel kell keresnünk a megfelelő táblázatból.

$k = 5 \quad p_5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$k = 6 \quad p_6 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Azaz k = ... lesz az az átvételi szám, amely mellett 96,65%-os valószinüséggel jó döntést hozunk.

$p_5 = 0,9161$

$p_6 = 0,9665$

$k = 6$

5. Azonos gyártási feltételek mellett előállitott szövetmintákon a hibák száma az ellenőrző vizsgálatok szerint – az alábbi módon alakult:

Hibák száma (k)	0	1	2	3	4	5	6
A minták száma (f_k)	327	340	160	53	16	3	1

Állapitsuk meg, hogy a fenti tapasztalati eloszlás származhatott-e Poisson eloszlásból?

Megoldás

Az összehasonlitást az elméleti eloszlás értékeivel való összevetéssel tudjuk elvégezni.

Számoljuk ki először a tapasztalati eloszlás jellemzőjét:

$\bar{x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{6} k\, f_k}{\sum_{k=0}^{6} f_k}$$

behelyettesitve

$\bar{x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\bar{x} \cong 1$

$900\,p = 1$

$p = \dfrac{1}{900}$

$\lambda = 1$

$p_o = 0,368$ $p_4 = 0,015$

$p_1 = 0,368$ $p_5 = 0,003$

$p_2 = 0,184$ $p_6 = 0,005$

$p_3 = 0,061$

$n = 900$

igen jól megközeliti

Igy

$$\bar{x} = \lambda = n \cdot p = 1, \sum_{k=1}^{6} f_k = 900$$

Tehát

$900 \cdot p =$ ....

Innen

$p =$ ....

A $\lambda =$ .... paraméterü eloszlás értékeit táblázatból kikeressük

$p_o =$ .... $p_4 =$ ....

$p_1 =$ .... $p_5 =$ ....

$p_2 =$ .... $p6 =$ ....

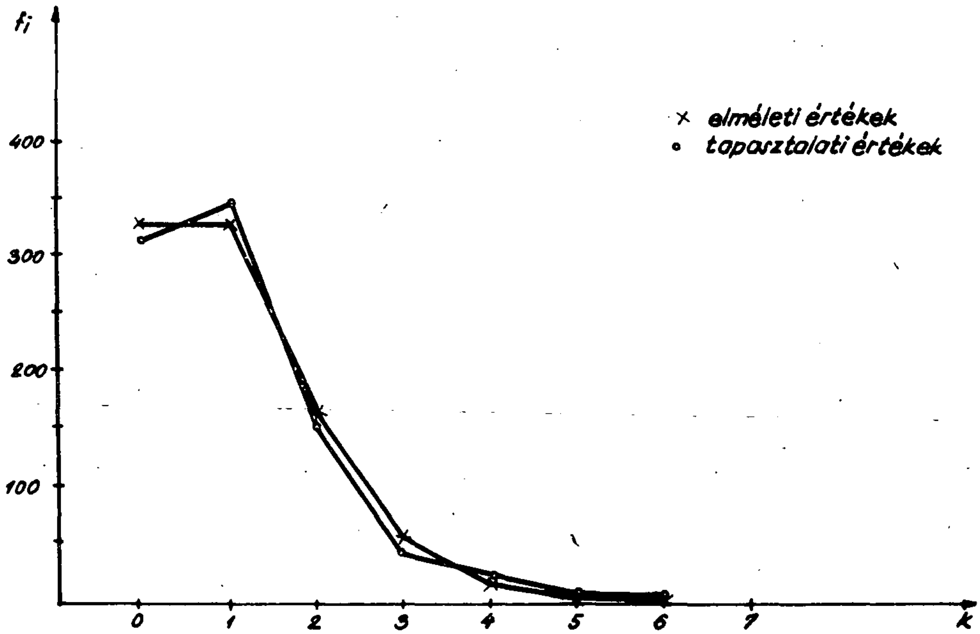
$p_3 =$ ....

Szorozzuk be ezeket az $n =$ .... mintaszámmal, s készitsünk táblázatot az elméleti és tapasztalati eloszlások összehasonlitására.

Hibák száma	0	1	2	3	4	5	6
A tapasztalati eloszlás gyakorisága	327	340	160	53	16	3	1
Az elméleti eloszlás gyakorisága	331	331	166	55	14	2,8	0,5

A táblázat adatai alapján látjuk, hogy .... a tapasztalati eloszlás gyakorisága az elméleti eloszlást.

Ábrázoljuk adatainkat grafikusan: Természetesen az összehasonlitáshoz statisztikai próbát is alkalmaznunk kell. Jelen esetben annak eldöntésére, hogy az eltérés a véletlennek tulajdonitható-e, a nemparaméteres un. chi négyzet próbát kell felhasználni. (Később foglalkozunk vele.)



9. ábra
A tapasztalati és elméleti eloszlás grafikus összehasonlitása

6. Kalácssütésnél 1 kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mi a valószinüsége, hogy egy 5 dkg-os szeletben egy szem mazsola sem lesz?

(M: $P(k = 0) \doteq 0,2231$)

7. Egy forgalmas postahivatalban egy év alatt 1090 cimzés nélküli levelet adtak fel. Mi annak a valószinüsége, hogy egy nap kettőnél több cimzetlen levelet adnak fel?

(M:

$P(k \geq 3) = 0,577$)

8. Egy férfiruha szöveten 100 m-es darabon átlagosan 10 hiba fordul elő. Egy öltönyhöz 3 m szövet kerül felhasználásra. 300 m-es szövetdarabból egyenruha készül. Milyen valószinüséggel fordulhat elő olyan öltöny, amelyen a szövési hibák száma egynél több?

(M:

$P(k \geq 2) = 0,04$)

9. Egy biztositótársaság 5000 azonos koru és szociális helyzetü biztositottal kötött életbiztositást, amely szerint évi 4 dollár dij fejében esetleges halál esetén a hozzátartozók részére 1000 dollárt fizet. Egy ilyen személy elhalálozásának valószinüsége statisztikai adatok szerint 0,0016. Mi a valószinüsége, hogy a társaságnak egy adott évben nem lesz nyeresége? Mi a valószinüsége, hogy legalább 10 000 dollár nyereséggel zárja az évet a társaság?

(M: $P(Ny \leq 0) = 0,0003$
$P(Ny > 10^4) = 0,81$)

10. Üvegpalackok gyártása során 5 mázsa üvegből kivánnak 1 kg-os, vagy 1/4 kg-os palackokat előállitani. A nyersanyag ellenőrzése alapján megállapitották, hogy 100 kg nyersanyagban átlagosan 30 db un. követ (fel nem olvadt üvegdarabot) találhatunk. A fenti nyersanyagból a két palacktipus közül melyik gyártása jár kevesebb selejttel? (100 db palackra vizsgáljuk a selejt %-ot!)

(M: 1 kg-osnál 100-ból $\approx$ 26
1/4 " 100-ból $\approx$ 7)

11. Egy homogén gépparkkal rendelkező üzemben 98 nap alatt a váratlan leállások statisztikája az alábbiak szerint alakult:

A váratlan leállások száma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Napok száma (f_i)	3	17	26	16	18	9	3	5	0	1	0

Milyen elméleti eloszlást követ a váratlan leállások száma?

(M: Poisson)

12. Statisztikai felmérések szerint a nap bizonyos szakaszaiban a Rákóczi ut-Lenin körut kereszteződésében egy kiválasztott irányban áthaladó gépkocsik száma óránként 2400. Tegyük fel, hogy ugyanezen felmérések szerint optimális esetben átlagosan 15 gépkocsi várakozhat és 25 gépkocsi felett már torlódás keletkezik. Jelenleg a lámpa 30 sec-onként vált. Optimális-e ezen időköz mellett az átlagosan várakozó gépkocsik száma? Elkerülhető-e 95%-os valószinüséggel a torlódás? Számitsuk ki az optimális váltási időközt! (Az érkező gépkocsik száma bármely t idő alatt Poisson eloszlásu!)

(M: nem optimális; $\mu = \lambda = 20$
nem kerülhető el a torlódás,
$P(x > 25) = 0,1121$
$t_{opt} = 22,5$ sec; $\mu = \lambda = 15$)

4.33 Normális eloszlás

A gyakorlat számára legfontosabb eloszlástipus. Folytonos eloszlás. Egy ξ változó normális eloszlást követ, ha sürüségfüggvénye:

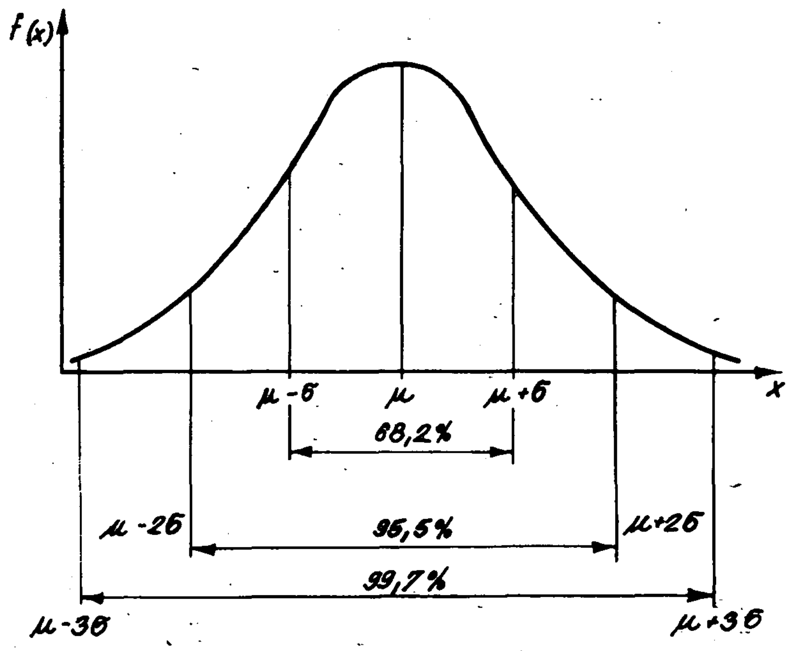
4.331
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

eloszlásfüggvénye pedig:

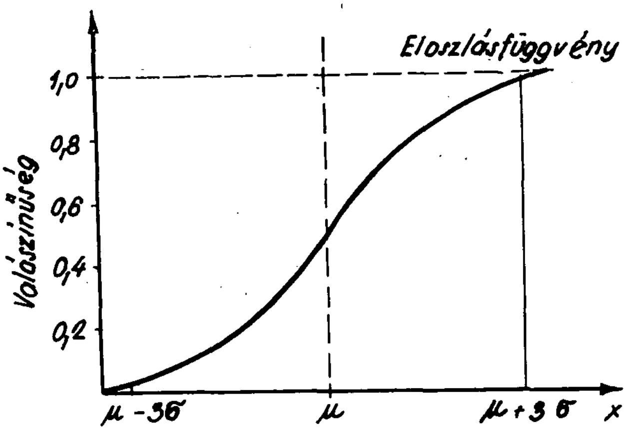
4.332
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ahol μ = az eloszlás várható értéke,
σ = az eloszlás szórása.

A normális eloszlás jellegzetes harang alaku sürüségfüggvényét a 10. ábra, eloszlásfüggvényét a 11. ábra mutatja.



10. ábra
A μ várható értékü és σ szórásu normális eloszlás sürüségfüggvénye



11. ábra
A μ várható értékü és σ szórásu normális eloszlás eloszlásfüggvénye

A gyakorlati számitások egyszerüsitésére az un. standard normális eloszlással dolgozunk. Ennek paraméterei: $\mu = 0$ és $\sigma = 1$, igy sürüségfüggvénye:

4.333 $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eloszlásfüggvénye

4.334 $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Táblázataink 4.333-ra és 4.334-re vannak kidolgozva. Látható, hogy a standardizálást

4.335
az $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ változó segitségével végeztük.

A normális eloszlás igen nagy gyakorlati jelentőségü. Az elméleti és gyakorlati munka során igen sokszor találkozunk normális vagy jó közelitéssel normális eloszlással, amit a központi határeloszlás tétele indokol. Ugyanakkor, mint láttuk, jól közeliti a két legfontosabb diszkrét eloszlást – a binomiálist és a Poissont – és a standardizálás révén számitástechnikailag a legkönnyebben kezelhető eloszlásunk.

FELADATOK

1. Egy tröszt dolgozóinak teljesitmény %-átlaga: 105%, a teljesitmények szórása 10%. Mi a valószinüsége annak, hogy egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye:

a) 140% felett van?
b) 85% és 120% között van?

(A teljesitmények eloszlása normális.)

Megoldás

normális eloszlás

A feladat a matematikai statisztikában leggyakrabban előforduló és felhasználható ....-ra érvényes törvényszerüségek alkalmazásával oldható meg.

teljesitményét

Jelöljük ξ valószinüség változóval a tröszt egyes dolgozóinak ...., melyek az előző megállapitás szerint normális eloszlást követnek.

105
10

A dolgozók teljesitményének – illetve a normális eloszlás függvénynek - várható értéke: μ = ...%, szórása σ = ...%

Feladatunk két valószinüség meghatározása:

140

a) P(ξ > 140%) annak valószinüsége, hogy egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye ......% felett van.

b) P(85 ≤ ξ < 120%)

85
120

jelöli azon valószinüséget, melynek értelmében egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye ......%-nál nagyobb, de ......%-nál kisebb.

a) feladat megoldása:

Egy μ és σ paraméterü normális eloszlású valószinüségi változó eloszlás függvénye kifejezhető a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével, amely igy irható.

$$F(x) = \Phi(u) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ahol:

- a μ és σ paraméterekkel jellemezhető normális eloszlásu valószinüségi változóhoz rendelt számérték: ....
- a standard normális eloszlás ($\mu = 0$ és $\sigma = 1$) független változója pedig ......, mely x értékkel kifejezhető

$x_1 = \ldots\ldots$%-kal; tehát a standard eloszlás u_1 értéke:

$$u_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének $u_1 = 3,5$ értékhez tartozó függvényértéke táblázatból: $\Phi(3,5) =$ = ..., mely valószinüség arra ad választ, hogy egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye 140% .... van.

Feladatunk a meghatározott esemény komplementerére vonatkozó valószinüség kiszámitása, igy a $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ összefüggés felhasználásával:

$$P(\xi > x_1 = 140\%) = 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots = $$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Végkövetkeztetésként megállapitható, hogy egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye igen kis valószinüséggel (.............) fordulhat elő;

..........% teljesitmény felett.

$$\frac{x - \mu}{\sigma}$$

x

u

140

$$\frac{140 - 105}{10} = 3,5$$

0,99976

alatt

0,99976

0,00024

0,00024

140

120%

85%

különbsége

standard

$$\frac{120 - 105}{10}$$

1, 5

0, 9332

$$\Phi\left(\frac{85 - 105}{10}\right) = \Phi(-2)$$

b) feladat megoldása:

Feladatunk a:
$P(85\% \leqq \xi < 120\%)$ valószinüség meghatározása, mely érték kiszámitásához ismerni kell:

- a $P(\xi < \dots\dots\dots)$
- a $P(\xi < \dots\dots\dots)$

valószinüségeket.

A $P(\xi < 120\%)$ és a $P(\xi < 85\%)$ értékek .... adja a keresett $P(85\% \leqq \xi < 140\%)$ valószinüséget.

A feladat megoldásához ismételten .... normális eloszlásfüggvényt kell alkalmazni, igy

$$F(x_2 = 120\%) = \Phi(u_2) = \Phi(\dots\dots\dots\dots)$$

mely értéket kiszámitva:

$$\Phi(u_2) = \Phi(\dots\dots\dots)$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének $u_2 = 1,5$ számértékéhez tartozó függvényértéke táblázatból

$\Phi(1,5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$, igy egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye 0, 9332 valószinüséggel kisebb 120%-nál.

Az előzőket követően a $P(\xi < 85\%)$ valószinüséget kell meghatározni.

Felirható, hogy:

$$F(x_3 = 85\%) = \Phi(u_3) = \dots\dots = \dots\dots$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvény táblázata negativ "u" értékeket nem tartalmaz, azonban a normális eloszlás szimmetrikusságának következményeként irható, hogy

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$	
tehát:	
$\Phi(-2) = 1 -$	0, 9772
$\Phi(-2) =$	0, 0228
Tehát egy találomra kiválasztott dolgozó teljesitménye 0, 0228 valószinüséggel kisebb, vagy egyenlő, mint ....%	85
A keresett $P(85 \leq \xi < 120)$ valószinüség igy: ....,	0, 9332-0, 0228=0, 9104
melynek alapján megállapitható, hogy egy kiválasztott dolgozó teljesitménye:	
.... valószinüséggel 85%-nál nagyobb, de 120%-nál kisebb.	0, 9104

2. Biztonsági előirások adott szövetanyaghoz olyan müszálak felhasználását engedik meg, amelynél az elemi szálak legalább 40%-a 195, 5 kp feletti szakitószilárdsággal rendelkezik. Két müszál tipust vizsgálnak; melyeknek paraméterei a következők:

"a" tipus: $\mu_a = 190$ kp $\sigma_a = 11$ kp

"b" tipus: $\mu_b = 188$ kp $\sigma_b = 30$ kp

Használhatók-e ezek a fenti szövethez? (A szakitószilárdság eloszlása normális.)

Megoldás

Feladat annak eldöntése, hogy az adott paraméterekkel rendelkező müszálaknál hány % a ....kp alá eső érték.	195, 5

szakitószilárdságát, normális	Jelöljük ξ valószinüségi változóval az egyes elemi szálak ...., melyek a feladat szerint .... eloszlást követnek.

"a" tipusu müszál vizsgálata

195,5 standard	Fejezzük ki a $\mu_a = 190$ kp várható értékü, és $\sigma_a = 11$ kp szórású normális eloszlásfüggvényt – az x = ...kp értéknél – a .... normális eloszlás eloszlásfüggvényével;
$\Phi(\frac{195,5-190}{11})$ ..... $\Phi(0,5)$	$F(x) = \Phi(u_a) = ... = ...$
	valamint határozzuk meg – a táblázat felhasználásával – a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékét az $u_a = 0,5$ helyen:
0,6915	$\Phi(0,5) = ...$
69,15% alatt felette 100(1-0,6915) = 30,75 nem	Megállapitható, hogy az "a" tipusu müszálak szakitószilárdságának ....%-a lesz 195,5 kp ...., mig ...... csak ....%, igy az "a" tipusu müszál .... használható fel a kérdéses szövetanyag gyártásához.

"b" tipusu müszál vizsgálata

195,5	$\mu_b = 188$ kp várható értékü és $\sigma_b = 30$ kp szórású normális eloszlás eloszlásfüggvényének értéke az x = ...kp helyen – a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének felhasználásával:
$\frac{195,5-188}{30}$ 0,25	$F(x=195,5) = \Phi(u_b) = \Phi(....) = \Phi(....)$
	mely u_b érték ismeretében
0,5987	$\Phi(0,25) = ...$

A kiszámitott eredmény alapján megállapitható, hogy a "b" tipusu műszálak szakitószilárdságának a megkivánt 195, 5 kp alá ....%-a, mig fölé .... =

= ....%-a esik, tehát ezen müszál

....

a kérdéses szövetanyag előállitásához.

Végkövetkeztetésként rögzithető, hogy az "a" tipusu müszál nem; az "a" vizsgálata után látszólag nem alkalmazható "b" tipusu müszál felhasználható a kérdéses szövetanyag gyártáshoz. Nyilvánvalóan az egyes műszálak a szakitószilárdságának

....

okozza ezt a végeredményt. Ezen példa is bizonyitja, hogy az átlagok .... nélküli használata sokszor helytelen döntések forrása lehet.

59, 87 , (1-0, 5987)100=

= 40, 13

megfelelő

szórása

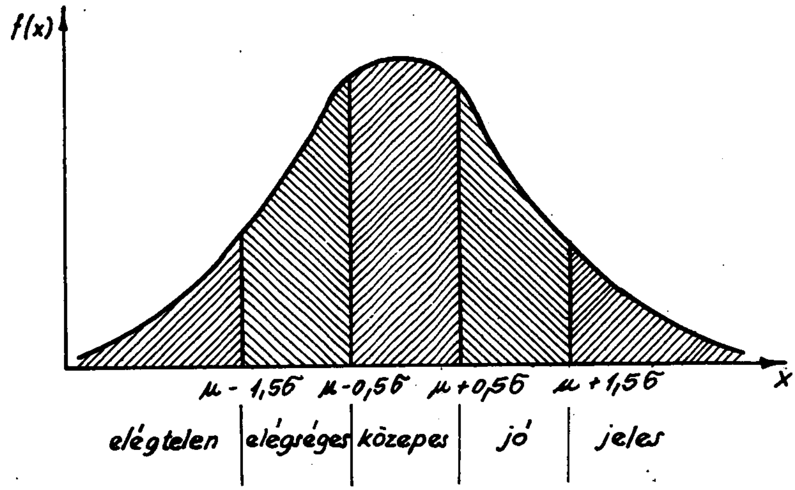
szórás

3. Sok évi vizsgaadatok feldolgozása azt mutatja, hogy a matematikai statisztika vizsgák érdemjegyeinek eloszlása jó közelitéssel normális. Az eloszlás normális jellegét feltételezve hány jeles, jó, közepes, elégséges, elégtelen érdemjegy várható egy 200 fős évfolyamban?

Megoldás

Ábrázoljuk a következő határokkal az érdemjegyek eloszlását

elégtelen:	$-\infty$;	$\mu - 1,5\sigma$
elégséges:	$\mu - 1,5\sigma$;	$\mu - 0,5\sigma$
közepes:	$\mu - 0,5\sigma$	$\mu + 0,5\sigma$
jó:	$\mu + 0,5\sigma$	$\mu + 1,5\sigma$
jeles:	$\mu + 1,5\sigma$	$+\infty$.



12. ábra
Érdemjegyek eloszlása normális eloszlást feltételezve

Az osztályzatok tehát a 12. ábra szerinti normális eloszlást követik. Ezek után meg kell határoznunk a megfelelő (x) értékeket (a függelékben levő táblázatot használjuk):

$U_1 = -1,5$ $\quad \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) =$

$= 1-0,9332 = 0,0668$

$U_2 = \ldots\ldots$ $\quad \Phi(-0,5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$U_3 = \ldots\ldots$ $\quad \Phi(0,5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$U_4 = \ldots\ldots$ $\quad \Phi(1,5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ebből az egyes osztályzatok valószinüségeit számolhatjuk:

elégtelen $\quad \Phi(-1,5) = 0,0668$

elégséges $\quad \Phi(-0,5) - \Phi(-1,5) = 0,3085 -$

$- 0,0668 = 0,2417$

közepes $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$-0,5, \; 1-\Phi(0,5) = 1-0,6915 =$

$= 0,3085$

$0,5, \quad 0,6915$

$1,5, \quad 0,9332$

$\Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = 0,3830$

jó	$\Phi(1,5) - \Phi(0,5) = 0,2417$
jeles	$\Phi(1,5) = 0,0668$
Ha szorozzuk ezeket az értékeket az évfolyam ...., akkor megkapjuk a várható érdemjegyek számát	létszámával
elégtelen	$200 \cdot 0,0668 = 13$
elégséges	48
közepes	78
jó	48
jeles	13

4. Bizonyos husipari termékeket három minőségi jellemző szerint minősitenek: suly, zsirtartalom, fehérjetartalom. A minőségre vonatkozó rendelkezések szerint nem megfelelő a termék, ha:

- sulya az előirt 120 g-nál 10%-kal (vagy többel) kisebb,
- zsirtartalma a sulyra vonatkoztatott 15%-os zsirtartalom követelményt $\pm$ 3 g-mal meghaladja (itt: 18 $\pm$ 3 g),
- fehérjetartalma kisebb, mint 43 g.

(A termék nem megfelelő, bármelyik fenti követelmény nem teljesül!)

Az egyes minőségi jellemzők egymástól független normális eloszlásu valószinüségi változók. Egy átadásra kerülő tételt mintavétellel minősitettek és az alábbi paramétereket nyerték:

Suly:	$\bar{x} \cong \mu = 120$ g	$s \cong \sigma = 6$ g
Zsirtartalom:	$\bar{x} \cong \mu = 18$ g	$s \cong \sigma = 2$ g
Fehérjetart.:	$s \cong \sigma = 3$ g	$v' = 6\%$ (relativ szórás!)

Számitsuk ki annak valószinüségét, hogy a gyártott tételből egy véletlenszerüen kiválasztott és megvizsgált darab:

a) nem megfelelő minősitést kap;

b) mindhárom jellemző szempontjából megfelelő lesz;

c) a suly és a zsirtartalom szempontjából megfelelő lesz, de fehérjetartalom vonatkozásában nem!

Megoldás

Jelöljük S-sel azt az eseményt, hogy a kiválasztott darab sulya, Z-vel, hogy a zsirtartalom, F-fel, hogy a fehérjetartalom megfelelő.

$\overline{S}$, $\overline{Z}$, $\overline{F}$ azt jelenti, hogy valamelyik minőségi jellemző nem megfelelő.

un. "vagy" kapcsolat, összeg
$P(\overline{S} + \overline{Z} + \overline{F})$

Mivel bármelyik esetben nem megfelelő a darab, ennek valószinüsége (mivel a kapcsolat ebben az esetben: ....) igy irható: ....

un. "és" kapcsolat, szorzat
$P(S \cdot Z \cdot F)$

Ha a darab megfelelő, ahhoz az kell, hogy mindháromra megfelelő legyen. Ekkor a kapcsolat .... ennek valószinüsége:.............................

$1 - P(S \cdot Z \cdot F)$
$P(\overline{S} + \overline{Z} + \overline{F})$

Ennek ellentettje, ha a darab nem jó, ezt igy irhatjuk fel:

$P(\overline{S} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{F})$ = ...

de erre igaz, hogy $P(\overline{S \cdot Z \cdot F})$ = ...

a de Morgan szabály értelmében.

$P(S \cdot Z \cdot \overline{F})$

Jelöljük ki annak valószinüségét, hogy a suly és zsirtartalom megfelelő, de a rehérjetartalom nem: ....

normális eloszlás

A minőségi jellemzők értékei valószinüségi változók, és eloszlásuk pedig:

....

$$\Phi(u_1) = \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

Érvényes tehát a $P(\xi < x_1)$ = ...

és $P(x_1 \leq \xi < x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\Phi(u_2) - \Phi(u_1)$
Ha a valószinüségi változó jelen esetben az x_1 értéknél kisebb, akkor a minőségi mutató szerint ...., ha x_1 és x_2	nem jó
közé esik a zsirtartalom esetében, akkor	jó
Tehát a sulyra felirhatjuk, hogy	
$P(\overline{S}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$P(x_1 < \xi)$;
ahol $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$120 - 12 = 108$
vagyis $U = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\frac{108 - 120}{6} = -2$
Tudjuk, hogy $\Phi(-u) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$1 - \Phi(u)$
A táblázatból $\Phi(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0, 9772
tehát $P(\overline{S}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0, 0228
és $P(S) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0, 9772
Ugyanigy számolva $P(\overline{F})$-re kapjuk:	$P(x < \xi) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.
A fehérjetartalom várható értékét a megadott értékekből számolhatjuk. (Feltételezzük, hogy $s \cong \ldots\ldots$, $\overline{x} \cong \ldots\ldots\ldots$)	σ és μ
$v = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100$-ből kapjuk $\overline{x} = \mu \cong \ldots\ldots$	$\frac{300}{6} = 50$
Ebből most már $P(\overline{F}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\Phi\left(\frac{43-50}{3}\right) = -\frac{7}{3} = -2{,}34$
$\Phi(-2,34) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$1 - 0,9904 = 0,0096$
és $P(F) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	0, 9904
A zsirtartalomhoz $x_1 = 15$, $x_2 = 21$, $\mu = 18$, $\sigma = 2$, tehát $P(Z) = \ldots\ldots\ldots$	$\Phi(u_2) - \Phi(u_1)$
$\Phi(u_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\Phi(u_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\Phi\left(\frac{21-18}{2}\right)$, $\Phi\left(\frac{15-18}{2}\right)$
a táblázatból $\Phi(1,5) = 0,9332$, $\Phi(-1,5) = 0,0668$	

0, 8664

0, 1336

P(Z) tehát: ....

$P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) =$ ....

Kiszámitjuk most a P(S· Z· F) képlet alapján azt, hogy a darab jó.

P(S) P(Z) P(F) = 0,844

P(S· Z· F) = ...

84, 4%

Tehát annak a valószinüsége, hogy a termék jó = ...

1-0, 844 = 0, 156

15, 6%

Arra, hogy a darab nem jó, már beláttuk, hogy $P(\overline{S} + \overline{Z} + \overline{F}) = P(\overline{S \cdot Z \cdot F}) =$ $= 1 - P(S \cdot Z \cdot F)$, tehát ennek valószinüsége: ....

vagyis ....%.

Válaszoljunk a harmadik kérdésre is

$P(S) \cdot P(Z) \cdot P(\overline{F}) = 0,0081$

0, 81%

$P(S \cdot Z \cdot \overline{F}) =$ .... = ...

tehát = ...%.

5. Automata palacktöltő export konyakot tölt. A megrendelő kikötése szerint az 510 ml ürtartalom alatti palackok aránya legfeljebb 3% lehet. Egy N = 20 000 db-os tétel paramétereit minta alapján meghatározták: $\overline{x} = 532,4$ ml. A töltőgép $\sigma = 6$ ml szórással tölti a kérdéses konyakfajtát. Határozzuk meg az optimális töltési szintet (a töltés várható értékét) és ennek alapján számitsuk ki a jelenlegi tétel esetén a tultöltés forint-értékét! Egy palack ára: 80 Ft.

Megoldás

normális eloszlás

Tudjuk, hogy a töltési ürtartalom valószinüségi változóként fogható fel, és eloszlása ....

A normál eloszlásu valószinüségi változóra érvényes, hogy $P(\xi < x) =$	$= \Phi(u)$
és innen $u =$	$= \frac{x - \mu}{\sigma}$
Az az információ, hogy az 510 ml ürtartalom alatti palackok aránya legfeljebb 3% lehet, más szóval azt jelenti, hogy adott szórás mellett az 510 ml ürtartalom alatti palackok .... 0, 03! Az 510-es érték pedig az adott ...... érték!	valószinüsége x
Irjuk ezt fel képlettel: .... vagyis $\Phi(u) =$	$P(\xi < 510) = 0,03$ 0, 03
Ebből kiszámitható az optimális töltési érték (Gépbeállitás!), mert az $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ -ból kapjuk: $\mu =$	$x + u\sigma$
innen (mivel x=510, σ =6), az μ értékét az előbbiből kapjuk.	
Előbb azonban gondoljuk meg, hogy $\mu > x$ esetén u pozitiv vagy negativ?	negativ
A táblázat pedig csak pozitiv értékeket ad meg. Alkalmazzuk tehát a $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ egyenletet, vagyis behelyettesitve:	
$\Phi(-u) =$	$1 - 0,03 = 0,97$
Keressük ki a táblázatból a $\Phi(0,97)$ -hez tartozó értékeket: $u =$	1, 88
Ezt az értéket helyettesitsük a $\mu = x + u\sigma$ egyenletbe, kapjuk az optimális töltési szintet, vagyis $\mu =$	$510 + 1,88 \cdot 6 = 521,3$ ml
A jelenlegi tétel átlaga $\bar{x} = 532,4$ ml, a tultöltés tehát .... palackonként.	$532,4 - 521,3 = 11,1$ ml
Ez 20 000 palack esetén	$20\,000 \cdot 11,1 = 222,000$ ml
Ez a mennyiség optimális töltés esetén .... palacknak felel meg.	$222\,000 : 521,3 \cong 425$
A veszteség tehát á 80, - Ft-tal számolva:	$425 \cdot 80 = 34\,000$ Ft.

6. Egy csokoládégyárban öt cukorkacsomagoló-gép működik. A sulyelőirások szerint a 95 g alatti csomagok aránya legfeljebb 2% lehet. A gépek azonos tipusuak; igy mindegyikre nézve a szórás 3,0 g. Az egyes gépek egyéb jellemzői: a beállitási szint (várható érték) és egy adott napon gyártott mennyiség. Ezek a következők:

μ_1 = 101,0 g	N_1 = 2500 db
μ_2 = 100,0 g	N_2 = 1800 db
μ_3 = 98,5 g	N_3 = 1300 db
μ_4 = 98,0 g	N_4 = 3000 db
μ_5 = 97,5 g	N_5 = 1400 db

A csomagokat egy helyen gyüjtik. A napi termelésből találomra kivettünk egy csomagot. Ezt lemértük és megfelelőnek találtuk. Mi annak a valószinüsége, hogy ezt a csomagot a harmadik gépen töltötték?

Megoldás

Jelöljük azt az eseményt A-val, hogy a csomag megfelelő. Mivel jelölnénk, hogy a csomagot az i-edik (i = 1, 2, 3, 4, 5) gépen töltötték? ....

$B_i \mid B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 \mid$

A kérdést most már fogalmazzuk meg képlettel ....

$P(B_3/A) = ?$

Egyszerüen számolható a $P(B_i)$ és a $P(A/B_i)$, mig a feltett kérdés ezekből a .... tétel alapján számolható ki.

Bayes

Számoljuk ki a $P(B_i) = \frac{N_i}{\sum N_i}$ alapján az egyes értékeket. $\sum N_i$ = ...

10 000

Igy $P(B_1)$=.... $P(B_2)$ = ... $P(B_3)$: .....
$P(B_4)$ = ... $P(B_5)$ = ...

0,25, 0,18, 0,13
0,30, 0,14

Mivel a töltősuly eloszlása .... számoljuk ki a 95 g alá eső csomagok %-os arányát, vagyis $P_i(\xi < 95)$ értékeket.

normális eloszlás

Ezt a $P(\xi < x_i) =$ .... kifejezésből számolhatjuk.	$\Phi\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma}\right) = \Phi(u_i)$
Az egyes u_i értékek:	
$u_1 = \frac{95 - 101,0}{3} = -2,0$	
$u_2 =$	$-1,66$
$u_3 =$	$-1,16$
$u_4 =$	-1
$u_5 =$	$-0,835$
A megfelelő valószinüségek, alkalmazva a .... összefüggést	$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$P_1 =$	$1 - 0,9772 = 0,0228$
$P_2 =$	$0,0485$
$P_3 =$	$0,1230$
$P_4 =$	$0,1587$
$P_5 =$	$0,2025$
Igy tehát a 95 g alatti csomagok arányát kaptuk. Mivel 2% a megengedett, ... mindegyikből. Igy a következő $P(A/B_i)$ értékeket kapjuk:	ezt vonjuk ki
$P(\overline{A\,\vert\,B_1}) =$	$0,003$
$P(\overline{A\,\vert\,B_2}) =$	$0,028$
$P(\overline{A\,\vert\,B_3}) =$	$0,103$
$P(\overline{A\,\vert\,B_4}) =$	$0,139$
$P(\overline{A\,\vert\,B_5}) =$	$0,182$

	Ezekből a megfelelő $P(A\|B_i)$ értékek, alkalmazva a $P(A) = \ldots\ldots$ szabályt
$1 - P(\bar{A})$	
0,997	$P(A\|B_1) = \ldots\ldots$
0,972	$P(A\|B_2) = \ldots\ldots$
0,897	$P(A\|B_3) = \ldots\ldots$
0,861	$P(A\|B_4) = \ldots\ldots$
0,818	$P(A\|B_5) = \ldots\ldots$
	Helyettesitsünk be a Bayes tétel összefüggésébe:
0,128	$P(B_3\|A) = \dfrac{P(A\|B_3) \cdot P(B_3)}{\sum_{i=1}^{5} P(A\|B_i)\, P(B_i)} = \ldots\ldots$
12,8	Tehát annak valószinüsége, hogy a csomagot a harmadik gép töltötte .... %.

GYAKORLÓ FELADATOK

7. Bizonyos tipusu müszál szakitószilárdsága a tapasztalatok alapján normális eloszlást követ. Az eloszlás paraméterei:

$$\mu = 200 \text{ kg} \qquad \sigma = 10 \text{ kg}$$

Számitsuk ki

a) várhatóan a szálak hány %-a esik szakitószilárdság szempontjából 175 kg alá!

b) várhatóan milyen valószinüséggel esik a szakitószilárdság 212 és 224 kg közé?

(M: a) $P(x < 175) = 0,0062$
b) $P(1212 < x < 224) = 0,1069$)

8. Egy gyártmány adott paraméter nomális eloszlást követ. Jellemzői: $\mu = 59$, $\sigma = 15$. Számitsuk ki

a) annak a valószinüségét, hogy a paraméter értéke 50-nél nagyobb!

b) azokat a határokat, amelyek közé a paraméter 90%-os valószinüséggel esik!

(M: a) $P(x > 50) = 0,7257$

b) $x_a = 34,5$

$x_f = 83,5$

9. A vizsgáztatás több éves tapasztalatai azt mutatják, hogy a vizsgázók 10%-a ér el jeles eredményt matematikai statisztikából. Mekkora a valószinüsége annak, hogy egy adott – és az előzőektől szignifikánsan nem különböző – 200 fős évfolyam esetén – ha mindenki levizsgázik – legalább 12 hallgató ér el jeles eredményt?
(Utmutatás: közelitsünk normális eloszlással, de figyeljünk a folytonossági korrekcióra!)

(M: $P(x > 12) = 0,9772$)

10. Speciális (nagyobb értékü) tömeggyártásban előállitott izzók élettartama $\mu = 1950$ óra és $\sigma = 250$ óra paraméterekkel jó közelitéssel normális eloszlást követ. Várhatóan az izzók hány %-a megy tönkre 1600 óránál kisebb müködés alatt? A vállalat a használt izzókat – bizonyos élettartam alatti müködés esetén – kicseréli, amely célra a legyártott izzókra 5%-ot tartalékol. Milyen élettartamot irhatunk elő a cserére? (tegyük fel, hogy a tartalék izzók e feletti élettartamuak!)

(M: a) $P(x < 1600) = 0,0808$
b) $x < 1540$ óra)

11. Egy ijász edzésen 40 m távolságból lő adott nagyságu céltábla közepére. Lövései a célpont körül $\sigma = 0,3$ m szórással normális eloszlásunak tekinthetők. Egy lövés a csapatversenyen akkor ér "pontot", ha a célponttól legfeljebb 50 cm-re talál. Az edzésen kilőtt 200 ijvessző közül várhatóan hány "pontot" érő lövése lesz ijászunknak?

(M: 181)

12. Adott időszakban gyártott öntött fémipari tömegtermék átmérőjét véletlen minta alapján kivánjuk becsülni. A mintán végzett vizsgálat adatait a következő osztályközös gyakorisági sor tartalmazza: (0,1 mm pontossággal mértünk!)

Átmérő mm	Gyakoriság f_i
13,51-14,01	4
14,01-14,51	7
14,51-15,01	23
15,01-15,51	41
15,51-16,01	21
16,01-16,51	5.
16,51-17,01	4

Előirás szerint a 16,60 mm-nél nagyobb, illetve 13,80 mm-nél kisebb átmérőjü termékek selejtnek minősülnek. Az átadás-átvétel 200 elemü véletlen minta alapján történik ugy, hogy a visszautasitás valószinüsége jó tétel esetén ne legyen nagyobb 0,06-nál. Mekkora lesz ez esetben a feltételeknek megfelelő legkisebb átvételi szám? (az átvételi szám megállapitásánál használjunk Poisson közelitést!)

(M: $\lambda \cong 4$ mellett, k = 7)

13. Egy 100 g-os névleges sulyu konzerv minőségi előirásai szerint a névleges sulynál 5%-kal kisebb töltősulyu termékek aránya legfeljebb 3% lehet. Töltőgépeink jelenleg σ = 5 g szórással képesek tölteni ezt a terméket. Határozzuk meg az optimális töltési szintet (várható értéket), amely még eleget tesz a fenti előirásnak! Házi szabadalom szerint gyártásközi ellenőrzéssel a termék szórása σ = 1 g-ra csökkenthető. Számitsuk ki, hogy évi N = 500 000 db konzerv esetén mekkora nyereséget jelent a fenti szabadalom! (Egy konzerv ára: 12 Ft.)

(M: μ_1 = 104,4
μ_2 = 98,8
N = 336,000 Ft)

14. Egy bizonyos tipusu elektroncső élettartamára vonatkozó követelmény, hogy a 950 óránál kisebb élettartamu csövek aránya legfeljebb 4% lehet. A gyártó vállalat egy adott időszakban előállitott többezer elektroncső élettartamát 250 elemü véletlen minta alapján ellenőrzi. A vizsgálat eredményet osztályközös gyakorisági sorba rendezve az alábbiak: (egész számu pontossággal mértünk!)

Osztályköz (óra)	Gyakoriság (f_i)
850,5 - 900,5	10
900,5 - 950,5	16
950,5 - 1000,5	28
1000,5 - 1050,5	40
1050,5 - 1100,5	60
1100,5 - 1150,5	45
1150,5 - 1200,5	25
1200,5 - 1250,5	17
1250,5 - 1300,5	9

Az élettartam normális eloszlást követ és feltételezzük, hogy $\overline{x} = \mu$ és $s = \sigma$. Állapitsuk meg, hogy

a) eleget tesz-e a gyártott tétel a minőségi követelményeknek!

b) ha a gyártott mennyiség tényleges átadásakor az átvevő csak akkor veszi át a tételt, ha 50 elemü véletlen mintában legfeljebb három 950 óránál kisebb élettartamu darabot talál -, akkor mekkora lesz egy tétel átvételének valószinüsége a fenti adatok alapján? (Közelitsünk Poisson eloszlással!)

c) ha a következő gyártási időszakban 1050 óra átlagos élettartamot kívánnak biztositani és a minőségi előirásoknak is (950 óra alattiak aránya legfeljebb 4%) eleget akarnak tenni, akkor mekkora relativ szórás engedhető meg?

(M: a) nem - ugyanis: $P(x < 950) = 0,0951$
b) mivel $\lambda \approx 5$, $P(\text{átvétel}) = 0,265$
c) $v = 5,44\%$

15. Automata gépek nagy tömegben gyártanak $10 \pm 0,1$ cm hosszuságu és $2 \pm 0,025$ cm átmérőjü hengereket. Statisztikai felmérések szerint adott tipusu automatákon a hossz szórása: $s = 0,053$ cm, az átmérőé: $s = 0,012$ cm. Mennyi a várható selejt ezeken a gépeken? (A hossz és az átmérő egymástól független változók, normális eloszlással; $s = \sigma$)

(M: $P(S) = 9,2\%$)

4.34 Egyéb eloszlások

Részletesebb tárgyalás nélkül megemlitjük a gyakorlatban az előbbieknél ritkábban előforduló, de használt eloszlásokat.

4.341 Hipergeometrikus eloszlás

A binomiális eloszláshoz hasonló diszkrét eloszlás. A visszatevés nélküli mintavételnél elméletileg nagy jelentőségü, de nehézkessége miatt 10%-nál kisebb kiválasztási arány esetén helyette a binomiális eloszlást használjuk. Ha N elemből S elemet megkülönböztetünk, a többi $N - S$ elemtől (mert pl. selejtes) és a N sokaságból n elemü mintát veszünk visszatevés nélkül, akkor annak valószinüsége, hogy a változó – amely az n mintában levő S jelü elemek száma – éppen k:

$$P(\xi = k) = p_k = \frac{\binom{N-S}{n-k}\binom{S}{k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

ha: $n \leq S$

A hipergeometrikus eloszlás paraméterei:

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}$$

ahol: $p = \frac{S}{N}$ és $q = 1 - p$

Ha mind N és mind n nagy és sem S sem N nem tul kevés, akkor a hipergeometrikus eloszlás jól közelithető egy olyan normális eloszlással, amelynek paraméterei megegyeznek az eredeti hipergeometrikus eloszlás paramétereivel.

$$\mu = p$$

(Vigyáznunk kell a folytonossági korrekcióra!)

4.342 Exponenciális eloszlás

Folytonos eloszlás. Egy ξ változó exponenciális eloszlást követ, ha

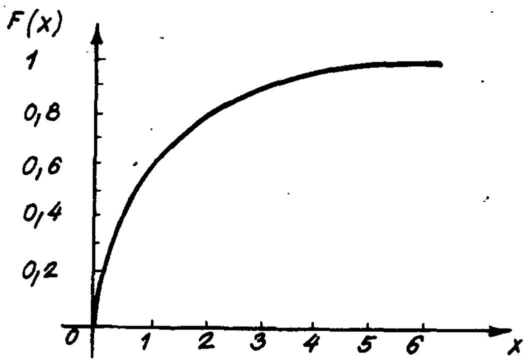
sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

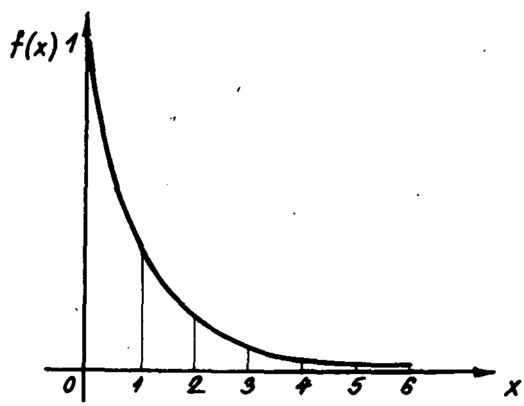
eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

ahol: λ az eloszlás paramétere, egy pozitiv állandó. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét a 13. ábra, eloszlásfüggvényét a 14. ábra mutatja.



13. ábra
Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye



14. ábra
Az exponenciális eloszlás sürüségfüggvénye

Az exponenciális eloszlás paraméterei:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$
$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

4.35 <u>A szórás általános értelmezése (Csebisev egyenlőtlenség)</u>

Ha nem ismerjük egy valószinüségi változó eloszlását, de ismeretesek paraméterei (μ és σ), akkor az adatok elhelyezkedéséről a következő egyenlőtlenségek adnak felvilágositást:

4.351 <u>Csebisev egyenlőtlenség</u>

$$P\left[|x - \mu| > k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

azaz: annak a valószinüsége, hogy bármely valószinüségi változó értéke távolabb essen várható értékétől, mint a szórás k-szorosa, kisebb, vagy egyenlő $1/k^2$

4.352 <u>Camp-Meidel egyenlőtlenség</u>

Lényegében 4.351 kiterjesztése bármely unimodális eloszlásra:

$$P\left[|x - \mu| > k\sigma\right] \leq \frac{1}{2,25\, k^2}$$

azaz: annak valószinüsége, hogy bármely unimodális eloszlásu valószinüségi változó értéke távolabb essen várható értékétől, mint a szórás k-szorosa, kisebb vagy egyenlő $1/2,25\, k^2$

FELADATOK

1. A magyar vegyiparban a munkások évi átlagkeresete 20 000. - Ft, a keresetek szórása 5000, - Ft.

   a) Milyen intervallumba esik a munkások legalább 60%-ának keresete?

   b) Mennyivel pontosabban becsülhetjük az intervallumot, ha tudjuk, hogy a keresetek eloszlása unimodális?

Megoldás

a) Tekintsük a kereseteket valószinüségi változónak és jelöljük x-szel. A keresetek eloszlásának jellege ismeretlen, de az eloszlás paramétereit ....

ismerjük

Az eloszlás várható értéke ugyanis

$$\mu = \dots\dots\dots\dots$$

20 000, - Ft

szórása pedig

$$\sigma = \dots\dots\dots\dots$$

5 000, - Ft

A várható érték körüli szimmetrikus intervallumot feltételezve, a várható értéktől való eltérést pedig $k\sigma$ -val jelölve a keresett intervallum a következő:

$$\dots\dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots\dots$$

$\mu - k\sigma$ $\mu + k\sigma$

A várható értéktől való abszolut eltérés felhasználásával egyenlőtlenségünket más formában irva

$$|x - \mu| \dots\dots\dots\dots\dots\, k\sigma$$

$<$

Feladatunkat matematikai formában irva, figyelembe véve, hogy a legalább 60% .... vagy egyenlő 60%-kal, tehát a következő:

nagyobb

$$P(|x - \mu| < k\sigma) \dots\dots\dots\; 0{,}6$$

$\geq$

	Ismeretlen eloszlásokra vonatkozó való-szinűségek közelitő meghatározását a
Csebisev-egyenlőt-lenség	....
	segitségével végezhetjük.
	A 4.351 alapján tehát
	$P(\|x - \mu\| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
	vegyük észre, hogy a keresett $\|x - \mu\| \leq k\sigma$ esemény az $\|x - \mu\| > k\sigma$ esemény
komplementere	....
	A komplementer események valószinűségére vonatkozó tétel $[P(\bar{A}) = 1 - P(A)]$ alapján tehát irhatjuk:
$1 - \frac{1}{k^2}$	$P(\|x - \mu\| \leq k\sigma) \geq$..........
	Adatainkat behelyettesitve kapjuk:
	$P(\|x - 20\,000\| \leq k \cdot 5000) \geq 1 - \frac{1}{k^2} =$
0,6	= ....
	Tehát
	$1 - \frac{1}{k^2} = 0,6$ és innen
2,5 1,58	$k^2 =$ .... és $k =$ ....
	Tehát:
1,58 · 5000	$\|x - 20\,000\| \leq$ .... = 7900
	A keresetek legalább 60%-a tehát a következő értékek között található
20 000-7900 20 000 + 7900	.... < x < ....,
	a kereseti intervallum tehát
12·100 27·9000	...... Ft-tól .... Ft-ig terjed.

b) Többletinformáció birtokában, azaz, hogy a keresetek eloszlása unimodális, a számitást a .... féle egyenlőtlenség segitségével végezhetjük.	Camp-Meidel
A 4.352 alapján tehát	
$P(\lvert x - \mu \rvert > k\sigma) \leq \frac{1}{2,25 \cdot k^2}$	
Az a) kérdés megoldásának gondolatmenetéhez hasonlóan irhatjuk:	
0,6 = ...	$1 - \frac{1}{2,25 \cdot k^2}$
Innen	
k^2 = ... és k = ...	1/9, 1/3
A keresetek legalább 60%, unimodális eloszlást feltételezve, tehát a következő értékek között található:	
.... < x <	20 000 - 1/3 5000
....	20 000 + 1/3 5000
azaz a kereseti intervallum	
.... Ft-tól .... Ft-ig	18 334 21 666
terjed.	

2. Egy forgalmas postahivatalba érkező személyek számát valószinüségi változónak tekinthetjük. 9 és 14^h között végzett nagyszámu felmérés adatai azt mutatják, hogy a változó (az egy óra alatt érkező ügyfelek száma) jellemzői: μ = 800, σ = 100.
Tegyük fel, hogy egy-egy kiszolgáló ablakot ideiglenesen megszüntethetünk, ha az

ügyfelek száma óránként 500 alá kerül, ill. egy ujabbat kell beállitanunk, ha ez a szám 1100 fölé kerül.

a) Milyen valószinüséggel várható, hogy az ügyfelek száma 500 és 1100 között marad?

b) Ha feltesszük, hogy az eloszlás unimodális, mekkora lesz ez a valószinüség?

c) Milyen értékkel várható a változó értéke a fenti két érték közé, ha az eloszlás jellege normális?

Megoldás

a) Az eloszlás jellegét nem ismerjük, de rendelkezésre állnak az eloszlás paraméterei. Jelöljük az 1 óra alatt érkező személyek számát x -szel (valószinüségi változó). Akkor a feladat értelmében a következő valószinüséget keressük:

500 1100

P(....... < x < ....)

Könnyen belátható, hogy a vizsgált intervallum (500 < x < 1100) a várható érték körül .... helyezkedik el. Ezt felhasználva irhatjuk:

szimmetrikusan

P(500< x <1100) = P(800 -...<x<800+...)

300 300

vagy a várható értéktől való abszolut eltérés segitségével kifejezve:

P(800-300<x<800+300)=P(|x-800|....)

< 300

Ismeretlen eloszlásokra vonatkozó valószinüségek meghatározását a .... segitségével végezzük.

Csebisev egyenlőtlenség

A 4.351 alapján tehát:

$P\left[|x-\mu| > k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$

....

mi azonban a $P(\lvert x - 800\rvert < 300)$, illetve általános alakban a $P(\ldots\ldots\ldots\ldots)$ valószinüséget keressük. Vegyük észre, hogy a $\lvert x - \mu\rvert \leq k\sigma$ esemény az $\lvert x - \mu\rvert > k\sigma$ esemény	$\lvert x - \mu\rvert < k\sigma$ komplementere
A komplementer események valószinüségére vonatkozó tétel $\lvert P(\bar{A}) = 1 - P(A)\rvert$ alapján irhatjuk:	
$P(\lvert x - \mu\rvert \leq k\sigma) = 1 - P(\lvert x - \mu\rvert > k\sigma) \ldots\ldots$	
....	$\geq 1 - \frac{1}{k^2}$
Adatainkat behelyettesitve kapjuk $P(\lvert x - 800\rvert < 1 - \frac{1}{k^2})$, de mivel esetünkben	
$k\sigma = \ldots\ldots\ldots$, tehát $k = \ldots\ldots\ldots$	300 3
Igy a keresett valószinüség	
$P(\lvert x - 800\rvert < 3 \cdot 100) = P(500 < x < 1100) \geq$	
$\geq \ldots\ldots\ldots = 0{,}9$, tehát $\geq 90\%$-kal	$1 - \frac{1}{9}$
b) Többletinformáció birtokában, azaz, hogy az eloszlás unimodális, a számitást a .... féle egyenlőtlenséggel végezzük.	Camp-Meidel
A 4.352 alapján:	
....	$P\left[\lvert x-\mu\rvert > k\sigma\right] \leq \frac{1}{2{,}25k^2}$
Az a) kérdés megoldásának gondolatmenete alapján irhatjuk:	
$P(\lvert x - 800\rvert < 300)$	$\geq 1 - \frac{1}{2{,}25 \cdot k^2}$
A keresett valószinüség tehát, mivel	
$k = \ldots\ldots\ldots$ $(k\sigma = 300)$	3
$P(\lvert x - 800\rvert < 300) = P(500 < x < 1100) \geq \ldots\ldots\ldots =$	$1 - \frac{1}{2{,}25 \cdot 3^2}$
$\ldots\ldots\ldots = 0{,}955$	$1 - 0{,}045$
vagy százalékosan 95,5%	

$\leq 3\sigma$

$\mu \pm 3\sigma$
0,9973

ismerete

99,73%

c) Az előzőekben elmondottak alapján a keresett valószinüségi mező $[P(500 < x < 1100)]$ a várható érték körüli $|x-\mu|$ .... szélességü intervallumnak felel meg.

Mivel az eloszlás normális, elméleti ismereteink alapján (három σ -szabály) a valószinüségi változó normális eloszlás esetén a .... intervallumban ....valószinüségü.

Az eloszlás jellegének ...., tehát igen pontos értéket ad a $P(500 < x < 1100)$ valószinüség értékére, mivel a fentiek szerint

$$P[500 < x < 1100] = \ldots\ldots\ldots \%$$

GYAKORLÓ FELADATOK

3. Egy tömeggyártásban előállitott tengely használhatatlan, ha a hossz a névlegestől $\pm$ 10 mm-rel eltér. Ilyen tengelyeket a vevő reklamációjára vagy kicserélnek, vagy árvisszatéritést adnak. Milyen valószinüséggel várhatók a reklamációk, ha egy nagymennyiségü tétel paraméterei: μ = 350 mm, σ = 4 mm és a hossz valószinüségi változóként kezelhető?

(M: $P\left[|x - 350| > 10\right] \leq 0,16$)

4. Egy textilgyárban előállitott vég szövet hossza valószinüségi változó, amelynek paraméterei: μ = 35 m, σ = 0,3 m. Legfeljebb mekkora valószinüséggel tér el a vég hossza 1 m-rel a várható értéktől?

(M: $\left[P\ |x - 35| \geq 1\right(\leq 0,09$)

5. Egy forgalmas utkereszteződésben egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma valószinüségi változó, a felmérések alapján μ = 500 és σ = 25 paraméterekkel. Legalább mekkora valószinüséggel esik 400 és 600 közé az utkereszteződésben egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma?

(M: $P\left[|x - 500| < 100\right] \geq \frac{15}{16}$)

6. Egy nagyvállalat teljesitménybérben dolgozó munkásainak teljesitménye valószinüségi változó, melynek eloszlását nem ismerjük. A felmérések alapján azonban ismert a teljesitmények átlaga: 105% és szórása: 10%. A dolgozók közül egyet véletlenszerüen megszólitunk. Mi a valószinüsége, hogy ennek teljesitménye:

a) nagyobb 160%-nál?
b) 80% és 130% között van?

(M: a) $P(x > 160\%) \leq 0,0165$

b) $P(80 < x < 130) \geq 0,84$)

7. Tegyük fel, hogy 4.33/11. példánkban ijászunk lövéseinek eloszlása nem ismeretes, de tudjuk, hogy unimodális. Legalább hány "pontot érő lövésre zámithatunk ez esetben?

(M: 168)

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. Denkinger Géza: Valószinüségszámitás. Tankönyvkiadó, Bp. 1968. J. 10-577.
2. Denkinger Géza: Példatár a valószinüségszámitáshoz. Tankönyvkiadó, Bp. 1967. J. 10-578.
3. dr. Kindler József: Matematikai statisztika (elemzés). Tankönyvkiadó, Bp. 1965. Egyetemi Jegyzet. J. 4-501.
4. dr. Kindler József: Statisztikai elemzés. NIM. IGÜSZI. Bp. 1967. A Felsőfoku Vegyipari Gépészeti Technikum jegyzete.
5. dr. Kindler József: Matematikai Statisztika I. Tankönyvkiadó, Bp. 1968. Egyetemi jegyzet. J. 4-722.
6. dr. Krekó Béla-dr. Szép Jenő: Matematika III. (Valószinüségszámitás) Tankönyvkiadó, Bp. 1964. Egyetemi jegyzet. J. 10-92.
7. Matematikai Példatár IV. Tankönyvkiadó, Bp. 1966. J. 5-300.
8. dr. Medgyessy Pál-dr. Takács Lajos: Valószinüségszámitás. Tankönyvkiadó, Bp. 1966. A Müszaki Matematikai Gyakorlatok sorozat (szerk.: dr. Fazekas Ferenc) V. kötete.
9. Rényi Alfréd: Valószinüségszámitás. Tankönyvkiadó, Bp. 1968.
10. Scharnitzky Viktor: Matematika III. Tankönyvkiadó, Bp. 1967. A Felsőfoku Könnyüipari Technikum jegyzete.
11. Solt György: Valószinüségszámitás (Példatár). Müszaki Könyvkiadó, Bp. 1969.
12. Dr. Denkinger Géza: Valószinüségszámitás. Tankönyvkiadó, Bp. 1970. J 10-942.
13. Dr. Denkinger Géza: Valószinüségszámitás (példatár). Tankönyvkiadó, Bp. 1970. J 10-944.

Binomiális eloszlás

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

I. táblázat

		p									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0.6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0 0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0 7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3126
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461

		p									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2126	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0, 000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074
	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222
	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518
	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961
	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442
	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Poisson-eloszlás

II. táblázat

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

k	λ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	λ = 2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	λ = 5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1752	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0245	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,00[illegible]5	0,00[illegible]2	0,0029	0,0027
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,0478	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,00[illegible]6	0,00[illegible]0	0,0033	0,00[illegible]7	0,0041	0,00[illegible]5
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

k	λ = 8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0[illegible]52	0,0237	0,0222	0,0[illegible]08	0,0195	0,0[illegible]83	0,0171	0,0[illegible]60	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0651	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251

k	λ = 9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,9208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,029	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	00,001
6	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0018	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0256	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

III. táblázat

Normális eloszlás

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,30	0,3814	0,6179	0,60	0,3332	0,7257
01	3989	5040	31	3802	6217	61	3312	7291
02	3989	5080	32	3790	6265	62	3292	7324
03	3988	5120	33	3778	6293	63	3271	7357
04	3986	5160	34	3765	6331	64	3251	7389
05	3984	5199	35	3752	6368	65	3230	7422
06	3892	5239	36	3739	6406	66	3209	7454
07	3980	5279	37	3725	6443	67	3187	7486
08	3977	5319	38	3712	6480	68	3166	7517
09	3973	5359	39	3697	6517	69	3144	7549
0,10	0,370	0,5398	0,40	0,3683	0,6557	0,70	0,3123	0,7580
11	3965	5438	41	3668	6591	71	3101	7611
12	3961	5478	42	3653	6628	72	3079	7642
13	3956	5517	43	3637	6664	73	3056	7673
14	3951	5557	44	3621	6700	74	3034	7703
15	3945	5596	45	3605	6736	75	3011	7734
16	3939	5636	46	3589	6772	76	2989	7764
17	3932	5675	47	3572	6808	77	2966	7794
18	3925	5714	48	3555	6844	78	2943	7823
19	3918	5753	49	3538	6879	79	2920	7852
0,20	0,3910	0,5793	0,50	0,3521	0,6915	0,80	0,2897	0,7881
21	3902	5832	51	3503	6950	81	2874	7910
22	3894	5871	52	3485	6985	82	2850	7939
23	3885	5910	53	3467	7019	83	2827	7967
24	3876	5948	54	3448	7054	84	2803	7995
25	3867	5987	55	3429	7088	85	2780	8023
26	3857	6026	56	3410	7123	86	2756	8051
27	3847	6064	57	3391	7157	87	2732	8078
28	3836	6103	58	3372	7190	88	2709	8106
29	3825	6141	59	3352	7224	89	2685	8133

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
0,90	0,2661	0,8159	1,20	0,1942	0,8849	1,50	0,1295	0,9332
91	2637	8186	21	1919	8869	51	1276	9345
92	2613	8212	22	1895	8888	52	1257	9357
93	2589	8238	23	1872	8907	53	1238	9370
94	2565	8264	24	1849	8925	54	1219	9382
95	2541	8289	25	1826	8944	55	1200	9394
96	2516	8315	26	1804	8962	56	1182	9406
97	2492	8340	27	1881	8980	57	1163	9418
98	2468	8365	28	1858	8997	58	1145	9429
99	2444	8389	29	1836	9015	59	1127	9441
1,00	0,2420	0,8413	1,30	0,1714	0,9032	1,60	0,1109	0,9452
01	2396	8438	31	1691	9049	61	1092	9463
02	2371	8461	32	1669	8066	62	1074	9474
03	2347	8485	33	1647	9082	63	1057	9484
04	2323	8508	34	1626	9099	64	1040	9495
05	2299	8531	35	1604	9115	65	1023	9505
06	2275	8554	36	1582	9131	66	1006	9515
07	2251	8577	37	1561	9147	67	0989	9525
08	2227	8599	38	1539	9162	68	0973	9535
09	2203	8621	39	1518	9177	69	0957	9545
1,10	0,2179	0,8643	1,40	0,1497	0,9192	1,70	0,0940	0,9554
11	2155	8665	41	1476	9207	71	0925	9564
12	2131	8686	42	1456	9222	72	0909	9573
13	2107	8708	43	1435	9236	73	0893	9583
14	2083	8729	44	1415	9251	74	0878	9591
15	2059	8749	45	1394	9265	75	0863	9599
16	2036	8770	46	1374	9279	76	0848	9608
17	2012	8790	47	1354	9272	77	0833	9616
18	1989	8810	48	1334	9306	78	0818	9625
19	1965	8830	49	1315	9319	79	0804	9633

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
1,80	0,790	0,9641	2,20	0,0355	0,9861	2,80	0,0079	0,9974
81	0775	9649	22	0339	9868	82	0075	9976
82	0761	9656	24	0325	9875	84	0071	9977
83	0748	9664	26	0310	9881	86	0067	9979
84	0734	9671	28	0297	9887	88	0063	9980
85	0821	9678	30	0283	9893	90	0060	9981
86	0707	9686	32	0270	9898	92	0056	9982
87	0694	9693	34	0258	9904	94	0053	9984
88	0681	9699	36	0246	9909	96	0050	9985
89	0669	9706	38	0235	9913	98	0047	9986
1,90	0,0656	0,9713	2,40	0,0224	0,9918	3,00	0,00443	0,99865
91	0644	9719	42	0213	9922	10	00327	99903
92	0632	9729	44	0203	9927	20	00238	99931
93	0620	9732	46	0194	9931	30	00172	99951
94	0608	9738	48	0184	9934	40	00123	99966
95	0596	9744	50	0175	9938	50	00087	99976
96	0584	9750	52	0167	9941	60	00061	99984
97	0573	9756	54	0158	9945	70	00042	99989
98	0562	9761	56	0151	9948	80	00029	99993
99	0551	9767	58	0143	9951	90	00020	99995
2,00	0,0540	0,9772	2,60	0,0136	0,9953	4,00	0,000134	0,999968
02	0519	9783	62	0129	9956	50	000016	999997
04	0498	9793	64	0122	9959	5,00	000002	999997
06	0478	9803	66	0116	9961			
08	0459	9812	68	0110	9963			
10	0440	9821	70	0104	9965			
12	0422	9830	72	0099	9967			
14	0404	9838	74	0093	9969			
16	0387	9846	76	0088	9971			
18	0371	9854	78	0084	9973			

e hatványai

IV. táblázat

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	0,50	1,6487	0,6065	1,0	2,718	0,3679
0,01	1,0101	0,9900	0,51	1,6653	0,6005	1,1	3,004	0,3329
0,02	1,0202	0,9802	0,52	1,6820	0,5945	1,2	3,320	0,3012
0,03	1,0305	0,9704	0,53	1,6989	0,5886	1,3	3,669	0,2725
0,04	1,0408	0,9608	0,54	1,7160	0,5827	1,4	4,055	0,2466
0,05	1,0513	0,9512	0,55	1,7333	0,5769	1,5	4,482	0,2231
0,06	1,0618	0,9418	0,56	1,7507	0,5712	1,6	4,953	0,2019
0,07	1,0725	0,9324	0,57	1,7683	0,5655	1,7	5,474	0,1827
0,08	1,0833	0,9231	0,58	1,7860	0,5599	1,8	6,050	0,1653
0,09	1,0942	0,9139	0,59	1,8040	0,5543	1,9	6,686	0,1496
0,10	1,1052	0,9048	0,60	1,8221	0,5488	2,0	7,389	0,1353
0,11	1,1163	0,8958	0,61	1,8404	0,5434	2,1	8,166	0,1225
0,12	1,1275	0,8869	0,62	1,8589	0,5379	2,2	9,025	0,1108
0,13	1,1388	0,8781	0,63	1,8776	0,5326	2,3	9,974	0,1003
0,14	1,1503	0,8694	0,64	1,8965	0,5273	2,4	11,023	0,0907
0,15	1,1618	0,8607	0,65	1,9155	0,5220	2,5	12,182	0,0821
0,16	1,1735	0,8521	0,66	1,9348	0,5169	2,6	13,464	0,0743
0,17	1,1853	0,8437	0,67	1,9542	0,5117	2,7	14,880	0,0672
0,18	1,1972	0,8353	0,68	1,9739	0,5066	2,8	16,445	0,0608
0,19	1,2096	0,8270	0,69	1,9937	0,5016	2,9	18,174	0,0550
0,20	1,2214	0,8187	0,70	2,0138	0,4966	3,0	20,086	0,0498
0,21	1,2337	0,8106	0,71	2,0340	0,4916	3,1	22,20	0,0450
0,22	1,2461	0,8025	0,72	2,0544	0,4868	3,2	24,53	0,0408
0,23	1,2586	0,7945	0,73	2,0751	0,4819	3,3	27,11	0,0369
0,24	1,2713	0,7866	0,74	2,0960	0,4771	3,4	29,96	0,0334
0,25	1,2840	0,7788	0,75	2,1170	0,4724	3,5	33,12	0,0302
0,26	1,2969	0,7711	0,76	2,1383	0,4677	3,6	36,60	0,0273
0,27	1,3100	0,7634	0,77	2,1598	0,4630	3,7	40,45	0,0247
0,28	1,3231	0,7558	0,78	2,1815	0,4584	3,8	44,70	0,0224
0,29	1,3364	0,7483	0,79	2,2034	0,4538	3,9	49,40	0,0202
0,30	1,3497	0,7408	0,80	2,2255	0,4493	4,0	54,60	0,0183
0,31	1,3634	0,7334	0,81	2,2479	0,4449	4,1	60,34	0,0166
0,32	1,3771	0,7261	0,82	2,2705	0,4404	4,2	66,69	0,0150
0,33	1,3910	0,7189	0,83	2,2933	0,4360	4,3	73,70	0,0136
0,34	1,4050	0,7118	0,84	2,3164	0,4317	4,4	81,45	0,0123
0,35	1,4191	0,7047	0,85	2,3397	0,4274	4,5	90,02	0,0111
0,36	1,4333	0,6977	0,86	2,3632	0,4232	4,6	99,48	0,0101
0,37	1,4477	0,6907	0,87	2,3869	0,4190	4,7	109,95	0,0091
0,38	1,4623	0,6839	0,88	2,4109	0,4148	4,8	121,51	0,0082
0,39	1,4770	0,6771	0,89	2,4351	0,4107	4,9	134,29	0,0074
0,40	1,4918	0,6703	0,90	2,4596	0,4066	5,0	148,41	0,0067
0,41	1,5068	0,6637	0,91	2,4843	0,4025	5,1	164,0	0,0061
0,42	1,5220	0,6570	0,92	2,5093	0,3985	5,2	181,3	0,0055
0,43	1,5373	0,6505	0,93	2,5345	0,3946	5,3	200,3	0,0050
0,44	1,5527	0,6440	0,94	2,5600	0,3906	5,4	221,4	0,0045
0,45	1,5683	0,6376	0,95	2,5857	0,3867	5,5	244,7	0,0041
0,46	1,5841	0,6313	0,96	2,6117	0,3829	5,6	270,4	0,0037
0,47	1,6000	0,6250	0,97	2,6380	0,3791	5,7	298,9	0,0034
0,48	1,6161	0,6188	0,98	2,6645	0,3753	5,8	330,3	0,0030
0,49	1,6323	0,6126	0,99	2,6912	0,3716	5,9	365,0	0,0027
0,50	1,6487	0,6065	1,00	2,7183	0,3679	6,0	403,4	0,0025
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}

ELLENÖRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENÖRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

dr. Szabó Gábor–Szüts István

MATEMATIKAI STATISZTIKA

PÉLDATÁR

II.

2. melléklet

94–235.oldalig Szüts István,
7–93.oldalig Szabó Gábor
munkája

KÉZIRAT

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1976

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

ELLENŐRZÉS

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

dr. Szabó Gábor–Szüts István

MATEMATIKAI STATISZTIKA

PÉLDATÁR

II.

KÉZIRAT

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1976

A kiadásért felelős:
a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karának dékánja
Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Rózsa Katalin
Megrendelve: 1975. február. Megjelent: 1976. január. Példányszám: 410
Készült: kisofszer eljárással, az MSZ 5601–59
és az MSZ 5602–55 szabvány szerint,
22,– (A/5) ív terjedelemben, 14 ábrával

75-0450 – Dabasi Nyomda, Budapest – Dabas

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

A Matematikai statisztika példatár I. 1970-ben történt megjelenése óta éppen négy év telt el. Ez idő elegendő volt arra, hogy igazolja hipotézisünket: helyes a programozott módszerrel való kisérletezés, sőt a hallgatóság hasonló elméleti jegyzet megirását is évek óta igényli.

A példatár megjelenése után az első használókat - a Gazdasági Mérnök szak 1970/1971. és 1971/72. évi I. éves hallgatóit - közvéleménykutatás formájában kérdőivek segitségével megkérdeztük jegyzetünkről alkotott véleményükről.

E rendkivül hasznos információk birtokában született meg a példatár I. részének átdolgozott változata, és 1972-ben megkezdtük a jelenlegi jegyzet anyagának gyüjtését és kidolgozását.

E munka során az ipar és a müszaki-gazdasági élet számtalan területén dolgozó Gazdasági mérnök hallgató házi dolgozataiból válogattuk ki az általánositásra, a statisztikai módszerek bemutatására legalkalmasabbakat, majd általunk irányitott hallgatókból összeállitott teamek "előprogramozták" a feladatokat. Az igy elkészült nyers programok képezték a jegyzet példáinak anyagát, egyuttal biztositva azt is, hogy a program lépésnagysága és a kritikus pontok hallgatói szempontból kontrollálták.

A matematikai statisztika elmélete és gyakorlati alkalmazása évről évre rohamosan szélesedik. Jegyzetünk ezért nem vállalkozhat még arra sem, hogy a felvett fejezeteken belül is teljességre törekedjék. Terjedelmi korlátok miatt nem tudtuk tárgyalni pl. a több szórásnégyzet összeállitására alkalmas Bartlett, Cohran próbákat, egy sor nemparaméteres módszert, és nem tudtunk kitérni a statisztikai próbák tervezésére, a bonyolultabb nemlineáris regressziókra és trendekre. E hiányokat a T. Olvasó az irodalomjegyzékben felsorolt széles körü hazai és külföldi szakirodalomból pótolhatja.

A példatár használata kapcsán felhivjuk a figyelmet arra, hogy a gyakorlati szakember - az alkalmazó - számára a matematikai statisztika eszköz, módszer, mely nagy segitséget jelenthet elemzésekben, döntések előkészitése során és a döntésben, de nem ez a probléma lényege, hanem a szakmai tartalom. Ezért jegyzetünket ne receptkönyvként forgassa a T. Olvasó, hanem igen alaposan fontolja meg, hogy az adott problémához melyik modell (módszer) illeszkedik a legjobban.

Sokkal több figyelmet kell forditani a probléma megfogalmazására, a hipotézis megalkotására, a módszer kiválasztására (ennek alkalmazhatóságára, használatára, előnyeire stb.) és a szakmai értelmezésre - mint a mechanikus matematikai megoldásra.

Bármely eredmény kapcsán sohasem tévesszük szem elől, hogy olyan területeken járunk, ahol az eredmény csak valószinü, minden statisztikai próbának és modellnek van hibája, kockázati elemei.

A példatárat az alábbi módon célszerü használni:

1. A mellékelt könyvjelzővel a feladatok melletti, vonallal elválasztott ellenőrző részt letakarjuk
2. Megoldáskor a pontozott részt kitöltjük
3. Ezután ellenőrzésként megtekintjük a megoldott sorban azonos sorban levő ellenőrző részt.

A használat csak ugy eredményes, ha a feladatok megoldásakor csak a szükséges beirások után ellenőrzünk. Ellekező esetben csupán a megoldott feladat megtekintésére korlátozódik tanulásunk, s ekkor a programozás nem tölti be feladatát. Ha a T. Olvasó egy-egy feladat kapcsán többször helytelenül válaszol, célszerü az elméleti jegyzetből a megfelelő részeket ismét áttanulmányoznia, mivel példatárunk megoldása során igen nagy biztonsággal kell helyesen válaszolnia.

Példatárunkat továbbra is kisérleti jellegünek tekintjük. Előfordulhat, hogy az olvasó célravezetőbb megoldást ismer, egyes megoldásokkal nem ért egyet. Ezuton is kérjük ezért jegyzetünk használóit, hogy észrevételeit, kritikáit, javaslatait juttassa el hozzánk.

Ezuton mondunk köszönetet Tánczos Lászlóné egyetemi tanársegédnek, a jegyzet lektorának, aki javaslataival, észrevételeivel, kritikáival nagyban hozzájárult ahhoz, hogy jegyzetünk ebben a formában kialakult - valamint azoknak az I. éves gazdasági mérnök hallgatóknak, akik a példák kiszámitásában, kiválasztásában és a programozásban segitségünkre voltak.

Budapest, 1974. junius hó

A SZERZŐK

5. STATISZTIKAI BECSLÉS

A becslés elmélete

A statisztikai becslés a sokaság paramétereit a minta statisztikai jellemzőinek (becsértékek) segitségével határozza meg. Legegyszerübb esetben pontbecslést alkalmazhatunk, melynek során a minta paramétereit ($\bar{x}$, s) fogadjuk el a sokaság paramétereinek becsléseként. A becsértékek (a minta átlaga és szórása) azonban valószinüségi változók, mig a sokaság paraméterei (várható érték, alapsokasági szórás) konstans értékek, igy a becslést az esetek döntő többségében egy ingadozásmutatóktól (általában a szórástól) függő, adott nagyságu értékközzel (intervallummal) végezzük, amely a becsülni kivánt paramétert meghatározott valószinüséggel tartalmazza (megbizhatósági vagy konfidencia intervallum).

Az alapsokaság várható értékének (μ) becslése

Pontbecslés esetén itt a minta számtani átlagának ($\bar{x}$) értékét fogadjuk el a μ becsléseként. Intervallumbecslésnél ismert alapsokasági szórás (σ) esetén, kétoldali vizsgálatnál a megbizhatósági intervallum:

$$\bar{x} - \mu_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + \mu_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

ahol:

$\bar{x}$ = a minta számtani átlaga (a μ becsértéke),

μ = a sokaság várható értéke (a becsült paraméter)

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, itt: σ = a sokaság ismert szórása,

n = a minta elemszáma

$\sigma_{\bar{x}}$ = $\bar{x}$ szórása (standard hibája)

u_{α} = a megbizhatósági együttható (értékét a szignifikancia, vagy kockázati szint (α) ismeretében általában a standard normális eloszlás táblázatából a $\Phi(x) = 1 - \alpha/2$-hez tartozó x érték ismeretében határozhatjuk meg).

Ha:

$\alpha = 5\%$ $\qquad u_\alpha = 1{,}96$

$\alpha = 1\%$ $\qquad u_\alpha = 2{,}58$

$\alpha = 0{,}1\%$ $\qquad u_\alpha = 3{,}30$

(vigyázat, az u táblázat egyoldali!)

Gyakran csak egyoldali határok vizsgálatával kell foglalkoznunk (μ nem lehet kisebb, illetve nagyobb egy adott értéknél), a másik oldali határ kevésbé vagy egyáltalán nem érdekel bennünket.

A becslési intervallum ilyen egyoldali esetben: ha μ legalább egy adott érték (A), azaz

$\mu \geq A$, $\quad 1 - \alpha$ valószinüséggel:

$$A = \bar{x} - u_\alpha^e \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

ahol:

A = a μ által legalább elérendő alsó határ,

u_α^e = az egyoldali megbizhatósági együttható.

Ha μ legfeljebb egy adott érték (F), azaz $\mu \leq F$, $1 - \alpha$ valószinüséggel:

$$F = \bar{x} + u_\alpha^e \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

ahol:

F = a μ által legfeljebb elérhető felső határ.

Ha:

$\alpha = 5\%$ $\qquad u_\alpha^e = 1{,}64$

$\alpha = 1\%$ $\qquad u_\alpha^e = 2{,}33$

$\alpha = 0{,}1\%$ $\qquad u_\alpha^e = 3{,}10$

Ismeretlen szórásu alapsokaság esetén, kétoldali vizsgálatnál az intervallum:

$$\bar{x} - t_\alpha \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot s_{\bar{x}}$$

ahol:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$, az $\bar{x}$ szórásának becslése a mintából,

itt s = a minta szórása
n = a minta elemszáma

t_α = a megbizhatósági együttható (értékét a szignifikancia szint és a szabadságfok ($f = n - 1$) ismeretében a Student-féle t eloszlás táblázatból határozhatjuk meg)

A becslési intervallum egyoldali esetben (a már ismert jelölésekkel):

ha $\mu \geqq A$, $1 - \alpha$ valószinüséggel:

$$A = \bar{x} - t_\alpha^e \cdot s_{\bar{x}}$$

ha: $\mu \leqq F$, $1 - \alpha$ valószinüséggel:

$$F = \bar{x} + t_\alpha^e \cdot s_{\bar{x}}$$

Az egyoldali t_α^e értékei ugyancsak a Student-féle t eloszlás táblázatában találhatók (illetve $n > 50$ esetén a Student eloszlás gyakorlatilag átmegy a normális eloszlásba, igy az ismert szórásu alapsokaság esetére vonatkozó összefüggések érvényesek).

Az alapsokaság szórásának (σ) becslése

Pontbecslés esetén a minta korrigált tapasztalati szórásnégyzetének ($\hat{s}^2$) értékét fogadjuk el az alapsokaság varianciájának becsléseként.

Intervallumbecslésnél, mivel az

$$\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2} \cdot f$$ mennyiség χ^2 eloszlást követ

(ha az alapeloszlás közelitőleg normális), a σ konfidencia (megbizhatósági) intervalluma:

$$\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\chi^2_{1/2\alpha}} \cdot f} < \sigma < \sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\chi^2_{1-1/2\alpha}} \cdot f}$$

ahol:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \text{ a minta}$$

korrigált tapasztalati szórásnégyzete,

n = a mintaelemek száma

f = n-1 = a szabadságfok

$\chi^2_{1/2\alpha}$ és $\chi^2_{1-1/2\alpha}$ = a χ^2 eloszlás α-tól és a szabadságfoktól függő táblázati értékei

Kis mintáknál ($n < 50$) a χ^2 eloszlás aszimmetrikus, igy $\chi^2_{1/2\alpha}$ értéke más, mint $\chi^2_{1-1/2\alpha}$ értéke.

Há $n > 50$ és az alapsokaság közelitően normális, a χ^2 eloszlás átmegy a normális eloszlásba.

Ekkor $\hat{s}^2 \cong \sigma^2$, igy $\sigma_{\hat{s}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}$, (a szórás standard hibája), és $\hat{s}$ eloszlása közelitően normális. Igy az intervallum:

$$\frac{\hat{s}}{1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{2(n-1)}}} < \sigma < \frac{\hat{s}}{1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{2(n-1)}}}$$

ahol:

u_α = a standard normális eloszlás α-tól függő kétoldali értéke.

Korrekció véges sokaságokra

Ha a sokaság véges és a mintaelemek száma nagy a sokasághoz képest (meghaladja az 5-10%-ot), akkor az előző esetekben korrekciós szorzót (k) kell alkalmazni:

$k = \frac{N - n}{N}$, ahol N = az alapsokaság elemeinek száma,

n = a minta elemeinek száma

E szorzó négyzetgyökével a $\sigma_{\bar{x}}$, $s_{\bar{x}}$, illetve $\sigma_{\hat{s}}$ értékeit módositanunk kell.

Igy pl. az ismert szórás alapján számitott kétoldali intervallum az alábbiak szerint módosul:

$$\bar{x} - u_{\alpha} \cdot \sqrt{k} \cdot \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + u_{\alpha} \cdot \sqrt{k} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

Az alapsokasági arány (π) becslése

Pontbecslés esetén a π becsléseként a mintabeli p arányértéket fogadjuk el.

A gyakorlati esetek többségében itt is intervallumbecslést kell alkalmaznunk. A minta p arányértéke körül a megbizhatósági intervallum szimmetrikusnak vehető és az alábbi formában irható fel:

$$p - u_{\alpha} \cdot s_p < \pi < p + u_{\alpha} \cdot s_p$$

ahol:

p = a mintabeli arány (%-ban)

s_p $= \sqrt{\frac{p\,(100 - p)}{n}}$

n = a mintaelemek száma

u = a standard normális eloszlás α-tól függő kétoldali értéke.

Az aszimmetrikus intervallumok számitására használható grafikus és numerikus közelitő eljárásokkal nem foglalkozunk.

FELADATOK

1. BCMO - 1-es anyagból készült csapok hőkezelés utáni keménysége 53,6 és 66,5 HR_c között kell legyen. Kooperációs szerződés első 20 000 db-os szállitmányából 250 elemü mintát vizsgáltak, amelyből 27 db nem felelt meg a fenti előirásoknak. Becsüljük meg e minta alapján a szállitmány várható selejtarányát!

Megoldás:

A példában alapsokasági arány (π) becslését kell elvégeznünk. Az alapsokaság esetünkben:

....

....

A becslést a ....

.... darabok alapján végezhetjük el.

A mintabeli selejtarány (p) számitása:

$$p = \frac{s}{n} \cdot 100 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = $$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ahol: s = a mintában talált nem megfelelő darabok száma,
n = a mintaelemek száma.

Legegyszerübb esetben............ alkalmazunk, azaz a mintabeli arányt elfogadjuk a sokaság selejtarányának becsléseként.

Példánkban: $\pi \cong p \cong \ldots\ldots\ldots\ldots$
Tehát a várható selejtarány a tételben: .... körül alakul.

Gyakorlatban azonban sokszor intervallummal becsüljük a várható arányt.

---

a 20 000 db-os szállitmány.

mintabeli selejtes

$\frac{27}{250} \cdot 100 = 10,8\%$

pontbecslést

10,8%

10,8%

A minta p arányértéke körül az intervallum:	
$p - u_{\alpha} \cdot s_p < \pi < p + u_{\alpha} \cdot s_p$	
ahol: π = ... = ...	az alapsokaság becsülni kivánt értéke = a mintabeli arány ≅ 10,8%
u_{α} = a standard normális eloszlás α-tól függő kétoldali értéke $s_p = \sqrt{\frac{p\,(100 - p)}{n}}$	
Készitsük a becslést α = 5%-os szignifikancia szinten!	
Ekkor: u_{α} = ...	1,96
$s_p = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}}$ = ...	$\sqrt{\frac{10{,}8 . 89{,}2}{250}} = \sqrt{3{,}85} \cong 2$
Igy: $u_{\alpha} \cdot s_p$ = ... ≅	1,96 . 2 ≅ 4
Az intervallum tehát (közelitően):	
10,8 - .... 10,8 + ...	4 4
.... $< \pi <$	6,8 14,8

A tétel várható selejtaránya tehát 95%-os megbizhatósági szinten a 6,8% - -14,8% közötti intervallumba becsülhető.

2. Szövődében mintavételes munkanap-felvétel segitségével kivánjuk meghatározni a gépek nemtermelő időhányadát. Az adott üzemben 30 azonos tipusu gép müködik, melyekre a becslést 90%-os megbizhatósággal, $\pm$ 5%-os pontossággal kell elkésziteni.
Hány elemü minta helyzetét kell rögzitenünk (azaz hány állapotot kell feljegyeznünk) ehhez?
Tegyük fel, hogy egy előzetes becslés alapján a nemtermelő időhányad kb. 20% körül várható!

Megoldás:

Példánk a korszerü munkaszervezési gyakorlatban alkalmazott mintavételes felvételek pontosságához kapcsolódó mintaszám meghatározását célozza.

A feladott kérdés a nemtermelő időhányadra vonatkozó π arány körüli intervallum pontosságát adja meg, és ebből kell számitanunk a szükséges n mintaszámot (megfigyelést).

Jelöljük a π körüli intervallum szélességének felét Δ-val (jelen esetben a p konkrét értéke nem érdekel bennünket!)

A Δ értéke nem más, mint ....=

= ....

$u_\alpha \cdot s_p = 5\%$

Mivel adott a megbizhatóság ......=

= ....

$\varepsilon = 90\%$

α = ... = ...

$100 - \varepsilon = 100 - 90 = 10\%$

α ismeretében u_α = ...

$1{,}64$

Viszont: s_p = ...

$\sqrt{\frac{p(100 - p)}{n}}$

Ahol ismert: .... ≅ ....

$p \cong 20\%$

Ismeretlen viszont: ....

n értéke

Ez viszont számitható, hiszen:	
$\Delta = u_{\alpha} \cdot s_p = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$u_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}$
ahonnan: $n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$n = \frac{p(100-p)}{\left(\frac{\Delta}{u_{\alpha}}\right)^2}$
Számszerüen: $n \cong \dots\dots\dots\dots \cong \dots\dots\dots$	$\frac{20,80}{3^2} \cong 180$
Tehát 90%-os megbizhatóság mellett 5%-os pontossággal ..... elemü minta (megfigyelés) alapján becsülhető a nemtermelő hányad. Esetünkben ez azt jelenti, hogy összesen 6 alkalommal kell véletlenszerüen végigmennünk az üzemen és valamennyi gép állapotát rögziteni (termel - nem termel).	180
(Figyeljük meg, hogy ha előzetesen 30%-os becslét adunk p-re, gyakorlatilag keveset változik a helyzet! A számitás ekkor n = ...megfigyelést ad, ami 8 véletlen végigjárást jelent!)	235

3. Az I. kötet 1.1 példájában szereplő müanyagrudacskák átmérőjének szórása ismert: $\sigma = 0,05$ mm.

   A gyártott tételből $n = 25$ elemü mintát vettek, melynek átlaga legyen azonos a példabeli átlaggal: $\bar{x} = 8,31$ mm.

   Készitsünk becslést e mintából $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ szinten a nagy tömegben előállitott rudak átmérőjére!

   Megoldás

   A legegyszerübb becslésként itt is

pontbecslést

$\bar{x} = 8,31$ mm

8,31 mm

$\frac{0,05}{\sqrt{25}} = 0,01$

1,96

2,58

-1,96.0,01,+1,96.0,01

8,29 8,33

8,31-0,026<,<8,31+0,026

8,284 <, <8,336

8,29-8,33 intervallumot
8,284-8,336 intervallumot

alkalmazhatjuk a ...., azaz a minta átlagát elfogadjuk, mint a gyártott termékek várható értékét. A pontbecslés szerint tehát:

$\mu \cong$ ....

Intervallumbecslés esetén ismert alapsokasági szórásról lévén szó, a megbizhatósági intervallum:

$$\bar{x} - u_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + u_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

A példa adatai szerint: $\bar{x}$..........

$\sigma_{\bar{x}}$ = ... = ...

$\alpha = 0,05$-ös szignifikancia szinten

u_{α} = ...

$\alpha = 0,01$-es szignifikancia szinten

u_{α} = ...

Igy a becslés 5%-os szinten:

8,31..........< μ <8,31............

..........< μ <............

1%-os szinten: .... μ ....

.... μ ....

A nagy tömegben gyártott rudak átmérőjének várható értékére tehát 95%-os megbizhatósággal a .... 99%-os szinten pedig a .... adhatjuk becslésként. (Ezek alapján pl. ismerve a $8,3 \pm 0,1$ türés határokat, kiszámitható a várható selejt % - hiszen az eloszlás normális és szórása ismert).

4. Ftálsavanhidrid tisztitására jelenleg alkalmazott eljárásokat akkor gazdaságos uj eljárással felváltani, ha a veszteség legalább 14%-ra csökken. Ujitási kisérlet során 50 sarzsot a javasolt eljárással desztillálták le, melyeknél az átlagos veszteség 13,5%-nak adódott. Az eljárás szórása irodalmi adatok alapján becsülhető:

$\sigma \cong 2\%$.

Becsüljük meg 5%-os szinten az ujitás szerinti technológia várható veszteségét és értékeljük ez alapján a kisérletet!

Megoldás

Példánkban a feltételezés szerint akkor gazdaságos bevezetni uj technológiát, ha a veszteség..... .... Ily módon csakis a .... határ érdekel bennünket, tehát .... egyoldali becslést kell késziteni.

A legfeljebb elérhető .... határra vonatkozó becslési intervallum:

$$F = \bar{x} + u_{\alpha}^{e} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

ahol: μ .... F

mivel α = 5%, és egyoldali esetről van szó,

táblázatból u_{α}^{e} = ...

$\sigma_{\bar{x}}$ = ...

Igy: F = ...

legfeljebb 14%

felső

egyoldali

felső

$\leqq$

$u_{5\%}^{e} = 1,64$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{50}} \cong 0,28\%$$

$13,5 + 1,64 \cdot 0,28 \cong 14\%$

A becslési intervallum felső határa tehát 95%-os megbizhatósági szinten e mintából éppen 14%.

A kritikus 14% a határon van, ezért bár az ujitási eljárást pozitivan értékelhetjük, célszerü ujabb kisérleteket végezni, esetleg több sarzson.

\

minta

8,31 mm

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,06}{\sqrt{24}} \cong 0,012$$

α -tól és a szabadságfoktól (f)

5. A fejezet 3. példájában szereplő müanyagrudacskák n = 25 elemü mintájában az átmérő átlaga: $\bar{x}$ = = 8,31 mm, a minta szórása: s = = 0,06 mm. Az alapsokaság eloszlásának szórása nem ismert.

Készitsünk α= 0,05 és α= 0,01 szinten becslést a nagy tömegben gyártott rudak átmérőjére és hasonlitsuk össze a 3. példa intervallumaival!

Megoldás

Ismeretlen alapsokasági szórásból lévén szó, a becslést a .... szórásának ismeretében kell elkésziteni.

A becslési intervallum:

$$\bar{x} - t_{\alpha} \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t \cdot s_{\bar{x}}$$

ahol $\bar{x}$ ismert: ....

$s_{\bar{x}}$ = ...

t_{α} értéke pedig .... függ

5%-os szinten számoljunk először!

A."t" eloszlás táblázatából α = ... és f = ... értéknél

t_{α} = ...

Az intervallum tehát:

8,31 - .... < μ < 8,31 + ...

.... < μ < ....

Az intervallum számitása 1%-os szinten (f = 24):

t_{α} = ...

Igy: $t_{\alpha} \cdot s_{\bar{x}}$ = ... = ...

8,31 - .... < μ < 8,31 + ...

.... < μ < ....

A 3. példa becslési intervallumai:

α = 5%-on: 8,29 < μ < 8,33

α = 1%-on: 8,284 < μ < 8,336

Látható tehát, hogy az alapsokaság szórásának ismerete a 3. példában azt eredményezi, hogy ott 99%-os megbizhatóságu becslés ad olyan .... intervallumot, mint a minta szórásából számitott, ... megbizhatóság mellett.

Az okot nyilván abban találhatjuk meg, hogy a minta adatai alapján készitett intervallumbecslés során tulajdonképpen még egy "becslést" használtunk fel - éspedig: ....,
azaz ily módon - mivel a szórás mintáról-mintára változó - a becslési intervallum szélessége is változik, nemcsak helyzete (mint ismert σ esetén,

5%
n - 1 = 24

2,06

2,06.0,012, 2,06.0,012

8,285 8,335

2,8

2,8.0,012 ≅ 0,034

0,034 0,034

pontosságu

↓

95%-os

a minta szórásával számitottuk az intervallumot ahol az intervallum szélessége konstans). Ezt ugy "korrigálja" a módszer, hogy a biztonsági tényező nagyobb értékével kell számolnunk!

(t_{α} = 2,06, mig u_{α} = 1,96; α = 5%-nál és f = 24-nél)

---

6. Szárazelemek behozatalára vonatkozó importszerződés eldöntése érdekében 5 db mintaként választott elem élettartamát vizsgálták meg. A vizsgálat eredményei: 19, 18, 22, 20 és 17 óra.

Készitsünk becslést $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$ és $\alpha = 0,001$ szignifikancia szinten az import termék várható élettartamára!

Megoldás

Az import termék várható élettartamát az öt elemü minta paramétereiből kell becsülnünk.

Ez esetben pontbecslést............
mivel ....

nem célszerü alkalmazni ehhez igen alacsony a minta elemek száma.

A minta szórásával készitett intervallum az alábbi módon számitható:

$$\bar{x} - t_{\alpha} \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha} \cdot s_{\bar{x}}$$

A számitáshoz határozzuk meg először a minta statisztikai paramétereit ($\bar{x}$ és s)!

$\bar{x}$ = ...

$$\frac{19+18+22+20+17}{5} \cong 19,2 \text{ óra}$$

s = ...

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}} =$$

....

(A kis elemszám miatt egyszerübb igy számolni!)

Számitsuk ki $s_{\bar{x}}$ értékét! (Vigyázzunk a nevező értékére!)

$s_{\bar{x}}$ = ...

A t_{α} értéke .... értékétől függ. Példánkban:

f = ...

Táblázatból:

α = 5% esetén t_{α} = ...

α = 1% " t_{α} = ...

α = 0,1% " t_{α} = ...

Az intervallumok értékei:

95%-os megbizhatósági szinten:

...........$< \mu <$...............

...........$< \mu <$...............

99%-os megbizhatósági szinten:

...........$< \mu <$...............

...........$< \mu <$...............

99,9%-os megbizhatósági szinten:

...........$< \mu <$...............

...........$< \mu <$...............

Megfigyelhető, hogy a megbizhatóság ....

az intervallum szélessége ....

....

$$= \sqrt{\frac{0,04+1,44+7,84+0,64+4,84}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{14,8}{5}} \cong 1,7 \text{ óra}$$

$$\frac{1,7}{\sqrt{4}} = 0,85 \text{ óra}$$

α és f

n - 1 = 5 - 1 = 4

2,78

4,60

8,61

19,2 - 2,78 . 0,85,
19,2+2,78.0,85

16,8 óra 21,6 óra

19,2 - 4,6 . 0,85, 19,2+4,6 . 0,85

15,3 óra 23,1 óra

19,2-8,61.0,85,
19,2 + 8,61 . 0,85
11,9 óra 26,5 óra

növelésével
nagymértékben megnő

használhatatlan

0,1%-os szignifikancia szinten már gyakorlatilag .... szélességü intervallumot kapunk.

Ezen tulmenően a kis mintaszám miatt igen nagymértékben nő .... veszélye is!

a másodfaju hiba (β)

több mint vizsgálata lényegesen nagyobb

A probléma megoldása: ...., ami viszont .... ráforditásokkal jár.

---

7. Zománcedények peremezéséhez felhasználásra kerülő 0,2 mm-es rozsdamentes króm-nikkel finomlemez tételek szakitószilárdságát $\pm$ 2 kg/mm^2-es szélességü intervallummal kivánjuk becsülni. Minimálisan hány mintadarab vizsgálata szükséges 99%-os megbizhatósági szint eléréséhez? A lemez szakitószilárdságának szórása ismert: σ = 7 kg/mm^2.

Mennyire csökkenthető a szükséges mintaszám, ha 90%-os megbizhatóság elegendő?

Megoldás

A fejezet 2. példájához hasonlóan jelöljük Δ-val a megbizhatósági intervallum szélességének felét.

$$u_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}} = u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Δ = ... = ...

Itt ismert adatok:

$\pm$ 2 kg/mm^2

Δ = ...

7 kg/mm^2

σ = ...

Valamint u_α táblázatból meghatározható.

Mivel α = ..., u_α = ...	0,01 2,58
n értékét keressük, ez viszont a fenti összefüggésből számitható:	
$\Delta = u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, n = ...	$\left(\frac{u_\alpha \cdot \sigma}{\Delta}\right)^2$
azaz: n = ...	$\left(\frac{2,58 \cdot 7}{2}\right)^2 \cong 9^2 = 81$
Tehát 99%-os megbizhatósággal $\pm$ 2 kg/mm^2 szélességü intervallumhoz legalább .... próbadarabot kell megvizsgálnunk.	81
Ha α = 10%-os szinten számolunk:	
táblázatból u_α = ...	1,64
Igy: n = ...	$\left(\frac{1,64 \cdot 7}{2}\right)^2 \cong 33$
90%-os megbizhatóságu $\pm$ 2 kg/mm^2 szélességü intervallumhoz tehát már csak .... mintadarab bevizsgálása szükséges.	33

8. Hesser-rendszerü töltőgépen első izben töltenek Nyro$_r$ technológiával előállitott, 200 g névleges sulyu, ujfajta enzimes mosóport. A töltőgép szórásának meghatározására 25 elemü mintát vettek, amelynek korrigált tapasztalati szórásnégyzete: $\hat{s}^2 = 144\ g^2$. Várhatóan milyen szórással tölthető nagy tömegben a mosópor?	
Megoldás	
Feladatunk ....becslése	az alapsokaság szórásának

pontbecslés
a minta korrigált tapasztalati szórásnégyzetét

144

12 g.

ehhez kicsi a minta elemeinek száma

intervallummal

144

a szabadságfok = n-1=24

10%
5%

24 értéknél

5 36,4

95 13,8

$$\sqrt{\frac{144}{36,4}\cdot 24}\ ,\quad \sqrt{\frac{144}{13,8}\cdot 24}$$

9,7 g 15,8 g

Ennek legegyszerübb módszere a ...., amelynek során .... elfogadjuk, mint az alapsokasági variancia (σ^2) becslését. Példánkban a pontbecslés tehát:

$\hat{s}^2 \cong \sigma^2 = \dots\dots\dots\dots$

azaz a várható szórás: $\sigma = \dots\dots\dots$

A pontbecslést azonban ez esetben nem célszerü alkalmazni, mivel ....
....

A becslést tehát .... kell elvégeznünk. σ az $\hat{s}^2$ ismeretében az alábbi intervallummal becsülhető:

$$\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\chi^2_{1/2\alpha}}\cdot f} < \sigma < \sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\chi^2_{1-1/2\alpha}}\cdot f}$$

ahol: $\hat{s}^2 = \dots\dots\dots\dots$

$f = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$\alpha = \dots\dots\dots\dots$, igy $1/2\alpha =$
$= \dots\dots\dots\dots\dots$

A χ^2 eloszlás táblázatából,
f = ...

$\chi^2_{1/2\alpha} = \chi^2 \dots\dots\% = \dots\dots\dots$
$\chi^2_{1-1/2\alpha} = \chi^2 \dots\dots\% = \dots\dots\dots$

Igy a σ megbizhatósági intervalluma:

$\dots\dots\dots\dots < \sigma < \dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots < \sigma < \dots\dots\dots\dots\dots$

Az uj por töltési szórása tehát 90%-os megbizhatósági szinten a... ....intervallummal becsülhető.	9,7 g és 15,8 g közé eső

9. 1 kg-os fehér kenyér dagasztása utáni adagoláshoz uj tipusu automatát próbálnak ki. Az első müszak kisérleti termeléséből 100 elemü mintát vettek, amelynek szórása (s) 6,5 dkg-nak adódott. Becsüljük meg az uj adagoló rendszer sulyszórásának várható értékét $\alpha = 5\%$-os szignifikancia szinten!

Megoldás

Példánkban nagy tömegben előállitott termék sulyeloszlásáról van szó, ezért az alapsokaság eloszlása .... eloszlással közelithető. Mivel emellett a minta elemeinek száma elegendően nagy (n = 100), igy gyakorlatilag $s \cong$ ...., illetve alkalmazható az $\hat{s}^2 \cong$ .... közelités is, és s eloszlása .... körül szintén .... vehető.	normális $\hat{s}$ σ^2 σ normális eloszlásunak.
Ez esetben számitható a szórás standard hibája: $\sigma_{\hat{s}} =$	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}$
és megbizhatósági intervallum az alábbi:	
$$\frac{\hat{s}}{1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{2(n-1)}}} < \sigma < \frac{\hat{s}}{1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{2(n-1)}}}$$	
Mivel $\alpha = 5\%$, $u_\alpha =$	1,96

6,5 dkg. , 100

$$\frac{6,5}{1+\frac{1,96}{\sqrt{2(100-1)}}},\quad \frac{6,5}{1-\frac{1,96}{\sqrt{2(100-1)}}}$$

5,7 dkg. 7,6 dkg.

5,7 dkg és 7,6 dkg

$\hat{s} \cong s =$ ...., $n =$ ....

Igy az intervallum:

.........$< \sigma <$..............

.........$< \sigma <$..............

Az uj gyártási eljárás szórása tehát (az adagolás utáni fázisban) 95%-os megbizhatósági szinten .... intervallumban várható.

10. A fejezet 2. példájához kapcsolódóan határozza meg, hogy a 81 elemü mintából $\pm$ 10%-os pontosságu (azaz $\Delta = 10\%$) becslés a 30 gépre milyen megbizhatósággal adható, ha a nemtermelő hányad becslések szerint kb. 30%!

(M: mivel $u_{\alpha} \cong 1,96$, $\varepsilon = 95\%$)

11. Ragasztott technológiával készitett lábbelik talpfelerősitési szilárdságát vizsgálják marhabox férfi cipőknél. Egy uj tipusu ragasztó szilárdságának ellenőrzésére négy müszak termeléséből véletlenszerüen 36 elemü mintát vettek. A minta paraméterei: $\bar{x} = 3,8$ kp/cm, $s = 0,9$ kp/cm. Az uj ragasztót akkor vezetik be, ha e kisérlet alapján a talpfelerősitési szilárdság legalább 3,5 kp/cm értéket várhatóan elér. Véleménye szerint pozitivan értékelhető-e a kisérlet 95%-os megbizhatósági szinten?

(M: igen, ugyanis: $A \cong 3,55$ kp/cm)

12. A fejezet 7. példáján szereplő finomlemez tétel szakitószilárdságát 30 véletlentszerüen kiválasztott lemez próbadarabjai alapján határozták meg. A minta paraméterei: $\bar{x} = 74,8$ kg/mm^2, $s = 7,3$ kg/mm^2. A beérkezett tétel 150 lemezből áll. Készitsen becslést a tétel szakitószilárdságára 2%-os (kétoldali) szignifikancia szinten! (Alkalmazza a k korrekciós szorzót, hiszen $n/N = 20\%$!) Hasonlitsa össze a korrekcióval számitott intervallumot a korrekció nélkülivel!

(M: $71,8 < \mu < 77,8$; a korrekció nélküli gyakorlatilag azonos: $71,5 < \mu < 78,1$)

13.^{x} Polietilén fólia gyártása során a fólia vastagságát óránként 49 elemü méréssel ellenőrzik. Két egymást követő órában mért minták átlagai:

$\bar{x}_1 = 98$ μm,

$\bar{x}_2 = 93$ μm, a vastagság szórása ismert:

$\sigma \cong 9$ μm. Készitsen becslét az adott időszakban gyártott fóliatömeg várható vastagságára, és hasonlitsa össze a két becslési intervallumot! (Válasszon $\alpha = 5\%$-os szintet!)

(M: $95,5 < \mu_1 < 100,5$;

$90,5 < \mu_2 < 95,5$

a két becslés szerint egészen más tartományban volt a gyártás az első vizsgált időszakban, mint a másodikban!)

14.[x] Elektromos szereléshez szigetelés eltávolító (huzalcsupaszitó) automatán készitik a megadott méretre vágott, mindkét végén csupaszitott huzaldarabokat. Egy-egy beállitással néhány tiz ezer db huzal készithető. Egy adott időszakban előállitott mennyiség szórását vizsgálva, az 100 db-os mintából 1,05 mm volt. A jelenlegi gyártásból vett 100 elemü minta szórása viszont 1,11 mm-nek adódott. Készitsünk becslést a két minta alapján gyártott tömeg szórására 95%-os megbizhatóság mellett, és hasonlitsuk össze a két intervallumot!

(M: az s eloszlások már normálissal közelithetők;

$0,93 < \sigma_1 < 1,22$;

$0,98 < \sigma_2 < 1,29$;

látható, hogy a két becslési intervallum jelentősen átfedi egymást, tehát valószinü, hogy az eltérés csak véletlen okok következménye).

6. STATISZTIKAI HIPOTÉZISVIZSGÁLATOK (STATISZTIKAI PRÓBÁK)

A hipotézis a vizsgált sokaság(ok) eloszlására, vagy ennek paramétere(i)re vonatkozó valamilyen állitás. Ha ennek ellenőrzésére (illetve bizonyitására) mintát használunk, akkor statisztikai hipotézisvizsgálatról (statisztikai próbáról) beszélünk. Ebben az esetben - mivel a minta csak része a sokaságnak, de nem azonos vele - valamilyen hiba elkövetésének lehetősége mindig fennáll.

Az elkövethető hiba kétféle lehet: un. elsőfaju hiba (α), és un. másodfaju hiba (β). Elsőfaju hibát csak igaz hipotézisek vizsgálata során követhetünk el. Akkor fordul elő, ha igaz hipotézist a minta adatai alapján nem fogadunk el. Az elsőfaju hiba számszerüen megegyezik a szignifikancia (kockázati) szinttel, és egy adott próba során tetszőlegesen kicsinyre csökkenthető.

Másodfaju hibát viszont csak hamis hipotézisek vizsgálata során követhetünk el. Másodfaju hiba akkor jelentkezik, ha a hamis hipotézist a minta adatai alapján nem utasitjuk el. A másodfaju hiba számszerü értéke egy adott próba során bármely konkrét - a feltett hipotetikustól eltérő - alapsokasági paraméterre vonatkozóan kiszámitható (6.13 rész). A másodfaju hiba veszélye csökken a hipotetikus és a tényleges várható érték eltérésének növekedésével, viszont nő, ha adott próba esetén az elsőfaju hibát csökkenthetjük.

Az első- és másodfaju hiba egyidejüleg csak a mintaelemek számának növelésével csökkenthető (ekkor ugyanis csökken a standard hiba). A próbák tervezése és az eredmény értelmezése során ezekre tekintettel kell lennünk. (Lásd a 6.13 részt.)

A hipotézisvizsgálat általános menetét röviden az alábbiakban vázolhatjuk:

- szakmai megfontolások alapján felállitjuk az igazolandó hipotézist,
- kiválasztjuk a legmegfelelőbb statisztikai próbát,
- felállitjuk a nullhipotézist (ez paraméteres próbáknál legtöbbször a szakmai hipotézis ellentéte),
- meghatározzuk a szignifikanciaszintet, a mintanagyságot, és végrehajtjuk a mintavételt (ez utóbbiakat természetesen akkor, ha a minta még nem áll rendelkezésre),

- meghatározzuk az előző pontban választott feltételek melletti elfogadási, illetve elutasitási (kritikus) tartományokat. Elfogadási tartománynak nevezzük azt a tartományt, amelybe a nullhipotézis fennállása esetén α szignifikancia (kockázati) szint mellett a statisztikai jellemző számitott értéke legalább $\varepsilon = 1 - \alpha$ valószinüséggel kerül. Az elut asitási tartomány viszont az, amelybe a nullhipotézis fennállása esetén, α szignifikancia szint mellett a jellemző számitott értéke legfeljebb α valószinüséggel kerülhet,
- meghatározzuk a próbához szükséges jellemző számitott értékét a minta adataiból,
- megvizsgáljuk, hogy a jellemző számitott értéke az elfogadási illetve elutasitási (kritikus) tartományba esik-e, és ez alapján döntünk a nullhipotézis elfogadásáról (vagy elutasitásáról),
- értelmezzük az előző pont eredményét a szakmai hipotézisre, és a konkrét intézkedéseket a gyakorlatban megtesszük.

A hipotézisvizsgálat logikája szerint tehát azt vizsgáljuk meg egy adott próbával, hogy a mintából kapott eredmény eltérése a hipotézistől a véletlennek tulajdonitható-e, vagy az eltérést a ténylegesen fennálló különbség okozza. Ha a mintából számitott érték az elfogadási tartományba esik, akkor az adott szignifikancia szinten, az adott minta (minták) alapján az eltérést a véletlennek tulajdonitjuk, azaz statisztikailag nem tartjuk szignifikánsnak. (Meg kell jegyeznünk, hogy a statisztikailag szignifikáns eltérés nem azonos a gyakorlatilag jelentős eltéréssel. Lehet, hogy egy adott vizsgált eltérésre mindkettő fennáll, de lehet, hogy csak az egyik. Előfordulhat tehát például, hogy egy statisztikailag szignifikáns eltérés gyakorlatilag nem minősül jelentősnek, ill. forditva.)

6.1 Paraméteres próbák

Paraméteres próbáknál az alapsokaság eloszlásának jellegét adottnak tételezzük fel (pl. χ^2, F, normális, Student), és csak a sokaság paramétere(i)-re vonatkozó hipotézist állitunk fel. Ezeknél a próbáknál az alapsokaságra illetve ezek megfelelő paramétereire (átlagára, szórására) vonatkozóan bizonyos feltételek teljesülése a próba alkalmazhatóságának feltétele.

Fontosabb ilyen tényezők:

- a mintaelemek és a mintavétel (több minta esetén) függetlensége,
- az alapsokaság eloszlásának megközelitően normális jellege (ez a jegyzetünkben szereplő átlag- és szórásprόbákra vonatkozik),

- a varianciáknak (a véletlen eltérés határain belüli) azonossága (a (vizsgált próbák közül az un. "t" próbáknál),
- a vizsgált valószinüségi változót legalább az intervallumskála szintjén kell mérni.

6.11 Szórásnégyzetek (varianciák) próbái

Szórásokra vonatkozó próbákat szórásnégyzetek segitségével végezhetünk. A szórásnégyzetekre vonatkozó próbák a normális alapeloszlástól való eltérésre sokkal érzékenyebb, mint az átlagpróbák. Általános esetben - mivel a varianciák azonossága az átlagokra vonatkozó próbák feltétele - a szórásokra vonatkozó próbákat az átlagpróbák előtt célszerü elvégezni. Ezért először ezeket a próbákat tárgyaljuk. Jegyzetünkben csak két variancia összehasonlitására alkalmas próbákkal foglalkozunk.

Két független, ismeretlen várható értékü és szórásu, normális eloszlást követő valószinüségi változó varianciáinak azonosságára vonatkozó hipotézisünket az un. F próbával ellenőrizhetjük.

A két alaposzlásból vett n_1 és n_2 elemü minták $\hat{s}_1^2$, illetve $\hat{s}_2^2$ korrigált varianciái torzitatlan becslései az alapeloszlás σ_1^2 illetve σ_2^2 varianciáinak. A fenti feltételek mellett az

$$F = \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2}$$ mennyiség (amennyiben $\hat{s}_1^2$ nagyobb, mint $\hat{s}_2^2$)

az un. Fisher-Snedecor féle F-eloszlást követi, amely a számláló (f_1) és a nevező (f_2) szabadságfokától ($f = n-1$) is függ. A számitást mindig ugy kell végeznünk, hogy a számlálóban a nagyobb variancia szerepeljen. Az F próba ily módon mindig egyoldali próba, hiszen azt vizsgáljuk, hogy $\hat{s}_1^2$ szignifikánsan nagyobb-e $\hat{s}_2^2$ értéknél. Táblázataink is egyoldali próbára vonatkoznak (mégpedig F_α, f_1, f_2, kritikus értékeit adják meg).

Két szórás azonosságára vonatkozó hipotézis ellenőrzésére egyszerüségi okokból lehetőleg mindig F próbát használjunk. Megjegyezzük ugyanis, hogy amennyiben az egyik variancia ismert alapsokasági érték, akkor a szórások azonosságát χ^2 eloszlás alapján is ellenőrizhetjük. Ha azonban az ismert alapsokasági variancia a nevezőben szerepel (mivel ez kisebb a vizsgált varianciánál), akkor a χ^2/f mennyiség azonos az F eloszlás, a nevező szabadságfoka ∞ sorában található megfelelő értékeivel, igy F próba alkalmazható. Ha az ismert alapsokasági variancia nagyobb, mint a mintavariancia - tehát a számlálóban szerepel - akkor viszont a számláló szabadságfoka ∞ oszlop megfelelő F kritikus értékeit használhatjuk (ekkor vizsgálhatnánk χ^2 eloszlás alapján is a nullhipotézist, oly módon, hogy az ismert varianciát a nevezőben szerepeltetjük és a χ^2 számitott értékét összevetjük az egyoldali, de ez esetben alsó határu χ^2 kritikus értékkel. Ha ennél nagyobb a számitott χ^2, akkor az eltérés nem szignifikáns). Célszerü tehát ismert szórás esetén is a nagyobb varianciát mindig a számlálóban szerepeltetni.

Több száz elemü nagyminták szórásainak összehasonlitására az 5. fejezetből ismert azon összefüggést használhatjuk fel, amely szerint nagyminták szórásának eloszlása az alapsokaság elméleti szórása körül közelitően normális. Ez esetben - ha a nullhipotézis igaz, azaz a két minta szórás szempontjából azonos sokaságba tartozik - az

$$u = \frac{|s_1 - s_2|}{s_d} \quad \text{mennyiség, ahol :}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}$$

normális eloszlást követ, és s_d a szórás standard hibája. A próbát itt is egyoldali szinten végezzük, tehát ha a fenti u mennyiségnek a két minta adatai alapján számitott értéke nem esik a normális eloszlás táblázatában $(1-\alpha)$ értéknél található kritikus érték által megadott tartományba ($|u_{sz}| < |u_{krit}|$), akkor a nullhipotézis igaz α szignifikancia szinten.

FELADATOK

1. Az 5. fejezet 6. példájában vizsgált import szárazelemekre vonatkozóan végezzünk összehasonlitást a megfelelő hazai tipusokhoz viszonyitva, az élettartam ingadozásait tekintve. A hazai tipus élettartam szórása ismert: $\sigma = 2,5$ óra. Az emlitett példában az 5 elemü minta korrigált tapasztalati szórásnégyzete: 3,7 óra^2 (14,8 : 4).

   5%-os szignifikancia szinten kisebbnek mondható-e az importtermék élettartam szórása?

   Megoldás

   A kérdés eldöntésére a két varianciát össze kell hasonlitanunk. Az egyik az ismert alapsokasági variancia, a másik az öt elemü minta korrigált tapasztalati szórásnégyzete.

   Az összehasonlitást célszerüen F próbával végezzük, bár az egyik variancia alapsokasági érték, igy elvileg χ^2 próba is alkalmazható lenne.

   F próba esetén a .... varianciát kell szerepeltetni a számlálóban. Példánkban: — nagyobb

   $\sigma = 2,5$ óra, $\sigma^2 = 6,25$ óra^2

   $\hat{s}^2 = 3,7$ óra^2 igy a .... — minta

   szórásnégyzete fog a nevezőben szerepelni!

   Hipotézisvizsgálatról van szó, igy fel kell állitanunk a szakmai hipotézist (H_{SZ}). Legyen ez a vizsgálat sorozat feltehető indoka: az import termék élettartam szempontjából homogénebbnek is mondható, mint a hazai szárazelemek. Azaz:

H_{sz}: $\sigma_{imp.} < \sigma_{hazai}$

A hipotézis csak .... állitás lehet, igy esetünkben ennek ellentéteként fel kell vennünk a .... Ez példánkban:

H_o: ....

A nullhipotézist $\alpha = 5\%$-os szignifikancia szinten vizsgáljuk (az F próbák az elméleti részben kifejtettek miatt mindig egyoldali próbák, a táblázatok is egyoldaliak!)

Határozzuk meg a számitott F értékét:

$\sigma_h^2 = 6,25$ óra^2, $\hat{s}_i^2 = 3,7$ óra^2

$F_{sz} = \qquad = $

....

A véletlen miatti eltérések F kritikus értékét az $\alpha = 5\%$-os F táblázatból határozhatjuk meg.
A táblázathoz szükségünk van a szabadságfokok értékeire.

A számláló szabadságfoka: f_{sz} =......

A nevező szabadságfoka: f_n =......

A kritikus F értéket (illetve a kritikus tartományt) igy a .... oszlop és a ....sor találkozásánál olvashatjuk le:

F_{krit} = ..., illetve:

konkrét

nullhipotézist

$\sigma_{imp} = \sigma_{hazai}$

$$\frac{\sigma^2}{\hat{s}_i^2} = \frac{6,25}{3,70} \cong 1,69$$

∞

$n - 1 = 4$

∞

4.

5,63

a kritikus tartomány: F	$> 5,63$
Mivel a próbában szereplő F érték (F = 1,69)	kisebb
.... a kritikus értéknél (azaz	nem esik
............a kritikus tartományba), így a nullhipotézist ....,	elfogadjuk
azaz a szakmai hipotézist	elutasitjuk.
Az ötelemü minta élettartam szórása alapján ...., hogy az import termék élettartam szempontjából homogénebb lenne.	nem állitható
A számszerü eltérés a két variancia között a .... tulajdonitható.	véletlennek

Az elméleti részben leirtak alapján a nullhipotézis ellenőrzésére ez esetben a χ^2 eloszlás is alkalmazható. Az 5. fejezetből ugyanis ismert (az alapsokaság varianciájának becslése), hogy az

$\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2}(n-1)$ mennyiség χ^2 eloszlást követ.

Mivel $n-1 = f$, ez azt jelenti, hogy a próbát ugy végezzük el, hogy a

χ^2 kritikus értékét összevetjük a próba χ^2 értékével, amely:

$$\frac{f.\hat{s}^2}{\sigma^2}$$

Ha ez a χ^2_{sz} érték kisebb, mint a táblázati kritikus érték, akkor a nullhipotézist elfogadjuk.

Vizsgáljuk meg példánk nullhipotézisét $\alpha = 5\%$-os szinten χ^2 eloszlás segitségével!

A nullhipotézis változatlan .... = ...	$\sigma_{imp} = \sigma_{hazai}$

$<$

kisebb

$\frac{4 \cdot 3,7}{6,25} \cong 2,4$

4

$\leqq 0,711$

kisebb

$>$

elfogadjuk

nem

Mivel $\hat{s}^2$.......... σ^2, igy a varianciák hányadosa egynél .... lesz. Igy a számitott érték:

$$\chi^2_{sz} = \frac{f.\hat{s}^2}{\sigma^2} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Mivel a varianciák hányadosa egynél kisebb, a kritikus értéket a

χ^2 eloszlás $\alpha = 95\%$-os értékénél kapjuk, f = ... szabadsági foknál.

A kritikus tartomány χ^2 ...., azaz a számitott érték ennél .... nem lehet! Példánkban:

$$\chi^2_{sz}(2,4) \ldots\ldots\ldots \chi^2_{krit}\,(0,711),$$

igy a nullhipotézist .... Az adott minta alapján .... szignifikáns az eltérés a két szórásnégyzet között.

Ez természetesen azonos az F próba alapján kapott eredményünkkel. A két próba kritikus értékei - azaz a két eloszlás - ugyanis csak egy konstansban különbözik egymástól, mégpedig:

$$F_{\alpha = 5\%} = f / \chi^2_{\alpha = 95\%}$$

Példánkban: f = 4 szabadsági foknál

$F_{5\%}$ = 5,63 (a számláló szabadság foka ∞)

$\chi^2_{\alpha = 95\%} = 0,711$; azaz valóban $\frac{4}{0,711} = 5,63$

2. Az 5. fejezet 14[x] példájában szereplő szigeteléseltávolitó (huzalcsupaszitó) automata szórása egy adott időszakban $n_1 = 100$ elemü minta alapján 1,05 mm volt. Egy következő időszaki gyártásból (néhány tizezer darab legyártása után) vett $n_2 = 100$ elemü minta szórása: 1,11 mm. Szignifikánsan különbözik-e a két szórás 95%-os illetve 90%-os megbizhatósági szinten? Ha ugyanis az eltérés szignifikáns, akkor az automatát fel kell ujitani a gyártott termékek zárlatveszélyessége miatt.

Megoldás

Két független, ismeretlen várható értékü és szórásu, normális eloszlásu valószinüségi változó szórásai eltérésének (illetve azonosságának) vizsgálatára az .... próbát alkalmazhatjuk. A fenti két normális eloszlásból vett $n_1 = n_2 = 100$ elemü minták ....

....

torzitatlan becslései a σ_1^2 illetve σ_2^2 alapsokasági varianciának.

Szakmai hipotézisünk legyen a következő: az automatát fel kell ujitani, mert a gyártott termékek szórása ...., és valószinü, hogy ez a zárlatveszély nagymértékü növekedését eredményezi.

Megfogalmazva:

H_{sz}: σ_1^2 .... σ_2^2

A szakmai hipotézis ilyen formában.................., a nullhipotézis:

F

$\hat{s}_1^2$ $\hat{s}_2^2$ korrigált tapasztalati varianciái

szignifikánsan megváltozott

<

nem vizsgálható

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

nagyobb

$1,11^2 = 1,23,\ 1,05^2 = 1,10$

$\frac{1,23}{1,10} \cong 1,12$

99

1,40

1,32

1,35

1,26

1,31

kisebb

elutasitjuk

1,12 , 1,31

elfogadjuk

elutasitjuk

H_o: ....

A próba számitott F értékénél a számlálóban a .... varian-cia fog szerepelni, azaz:

$\hat{s}_1^2$ = ..., $\hat{s}_2^2$= ....

F = ... = ...

A megengedhető kritikus értékeket, mivel a szabadsági fokok azonosak:

$f_1 = f_2$ = ..., a táblázatból interpolálással nyerhetjük.

α = 10% esetén az $f_1 = 60$ oszlopban található értékek az

$f_2 = 60$ sorban:.............., az

$f_2 = 120$ sorban:................,

az $f_1 = 120$ oszlopban és az f_2 =

= 60 sorban: ....

az $f_2 = 120$ sorban......... A két interpolált érték tehát 1,35 és 1,29

A keresett érték pedig e kettő között van (közelebb az 1,29-hez)

$F_k \cong$ ....

Ha a számitott F érték ennél ......, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben..................

Példánkban:

F_{sz} = ..., F_k = ...

igy a nullhipotézist ...., azaz a szakmai hipotézist .... α = 10%-os szignifi-

kancia szinten az eltérés a két variancia között ...., az eltérés csak a .... miatt áll fenn.	nem szignifikáns mintavételi véletlen
α = 5%-os szinten vizsgálva az előbbihez hasonló módon interpolálva (az f_1 = 60 oszlopbeli értékek:	
f_2 = 60 sorban:	1,53
f_2 = 120 sorban: ...., az f_1 =	1,43
= 120 oszlopbeli értékek	1,47
és ....) igy ez esetben 1,47 és 1,39 között:	1,35
F_k	$\leq 1{,}42$
Azaz nyilvánvalóan ez esetben is .... a szakmai hipotézist, mivel magasabb megbizhatósági szinten a megengedett eltérés .... a kritikus érték is ...., hiszen a megbizhatósági intervallum	elutasitjuk nagyobb nagyobb szélesebb.
Az előző fejezet 14^{x}. példájában erre az eredményre abból következtethetünk, hogy a két szórás körül becsült intervallumok jelentős mértékben "átfedik" egymást.	

3. Egy textilüzemben uj technológiát vezettek be a szövet minőségének javítására. A minőség javulását a gyürődésszög csökkenése jelenti. Ennek ellenőrzésére szolgáló átlagpróba (lásd: 6.12 részben az 5. példát!) előtt azonban a régi ill. uj technológia varianciáinak azonosságáról meg kell győződnünk!

A vizsgálatokat lánc és vetülék irányban kell külön-külön elvégezni.

A 30-30 elemü mintából kapott szórások:

Régi technológia (1): $\hat{s}_{\ell,1} = 8,9^o$

$\hat{s}_{v,1} = 9,8^o$

Uj technológia (2): $\hat{s}_{\ell,2} = 9,5^o$

$\hat{s}_{v,2} = 7,4^o$

α = 1%-os szinten vizsgálva van-e szignifikáns eltérés a régi és az uj technológiával gyártott szövetek gyürődésszögeinek szórásai között?

Megoldás

A szórások azonosságát (vagy eltérését) a ....keresztül,....... próbával végezzük el.

varianciákon F

Legyen a szakmai hipotézis: a gyürüdésszög szórása is javul, azaz csökken. A nullhipotézis ....azaz (mind vetülék, mind lánc irányban értve):

ennek ellentéte

H_0 ....

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Határozzuk meg mindkét irányban a próba számitott F értékeit!

$\hat{s}_{\ell,1} = 8,9^o$ igy $\hat{s}^2_{\ell,1} = 79,2$

$\hat{s}_{\ell,2} = 9,5^o$ igy $\hat{s}^2_{\ell,2} = 90,2$

$\hat{s}_{v,1} = 9,8^o$ igy $\hat{s}^2_{v,1} = 96,0$

$\hat{s}_{v,2} = 7,4^o$ igy $\hat{s}^2_{v,2} = 54,8$

A számitott F érték lánc irányban (mivel $\hat{s}^2_{\ell,2}$ .... $\hat{s}^2_{\ell,1}$):

>

$F_{sz} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

vetülék irányában (mivel itt viszont)

$\hat{s}^2_{v,1}$ .... $\hat{s}^2_{v,2}$):

$F_{sz,v} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

A kritikus tartomány az $\alpha =$ ....%-os.........
táblázatból az $f_1 = f_2 =$ ....
szabadsági fokok sorának ill. oszlopának találkozásánál kapjuk (gyakorlatilag $f_2 = 30$):

F_k ....

azaz a számitott értékek ennél .... nem lehetnek. Mivel példánkban

$F_{sz,\ell} = 1,14$, $F_{sz,v} = 1,75$ és

F_k mindkettőnél ....igy
a nullhipotézist ...., egyuttal
a szakmai hipotézist ....

Tehát $\alpha = 1\%$-os szignifikancia szinten e mintákból ....statisztikailag szignifikáns eltérés a két technológia gyürődésszögeinek szórása között. A számszerü eltérést .... tényezők okozták, tehát jogosan tételezhetjük fel az átlagpróba során a varianciák ....

$$\frac{\hat{s}^2_{\ell,2}}{\hat{s}^2_{\ell,1}} = \frac{90,2}{79,2} = 1,14$$

$>$

$$\frac{\hat{s}^2_{v,1}}{\hat{s}^2_{v,2}} = \frac{96,0}{54,8} = 1,75$$

1

F

$30 - 1 = 29$

$\geqq 2,41$

nagyobbak

nagyobb

elfogadjuk

elvetjük.

nem mutatható ki

véletlen

azonosságát.

4. Export előirások 1,5" névleges szélességü kerékpártömlők szakitószilárdságának alsó határát 1,40 kp/mm²-ben irják elő. Az eddigi használt BICKPT keverékből készült köpenyek szakitószilárdságának szórása: $\sigma = 0,18$ kp/mm².

Az uj LKPT keverékből, amely feltételezés szerint a késztermék szakitószilárdságát növeli, és a termék e szempontból homogénebb is lesz - készitett 400 elemü minta szórása: 0,13 kp/mm². Vizsgáljuk meg, hogy a szakemberek azon feltevése, amely szerint nemcsak a késztermék szakitószilárdsága nő az uj keverék alkalmazásával, hanem e szempontból egyöntetübb is lesz a termék, igazolható e mintánk adatai alapján? ($\alpha = 0,05$.)

Megoldás

Példánkban minta szórást kell alapsokaság ismert szórásával összehasonlitani. Az eltérést .... próba segitségével végezzük, de nem a szórások, hanem a .... alapján.

Az F próba esetén mindig a .... varianciának kell a számlában szerepelni, igy példánk adataiban:
s .... σ , tehát az .... lesz a számlálóban.

$\sigma^2 = 0,18^2$ kp/cm², $s^2 \cong \hat{s}^2 = 0,13^2$ kp/cm²

igy σ^2 = ..., s^2 = ...

A szakmai hipotézis ez esetben, hogy az uj keverék szórása kisebb szakitószilárdságot tekintve, azaz:

....

F

varianciák

nagyobb

utóbbi $<$

0,0324 0,0169

$H_{sz}: \sigma^2_{kis} < \sigma^2_{régi}$

A nullhipotézis ...., azaz	ennek ellentéte
....	H_o: $\sigma^2_{kis} = \sigma^2_{régi}$
Az F próba számitott értéke:	
F_{sz} = ...	$\frac{0,0324}{0,0169} \cong 1,91$
α = 5%-os szignifikancia szintet választottunk.	
A számláló szabadságfoka: f_1 = ...,	∞
a nevezőé: f_2 = ..., azaz	399
a táblázati értékek miatt gyakorlatilag	ez is ∞
A kritikus tartomány az .... eloszlás	F
α = ...%-os táblázatából:	5
F	$\geqq$ 1
mivel a számitott érték .... tartományba ....; hiszen:	a kritikus esik
1,91 > 1, ezért a nullhipotézist.... ...., egyuttal a szakmai hipotézist	elvetjük elfogadjuk
Fogalmazza meg mit jelent ez a példában szakmailag!	Az uj kisérleti keverék szórása jobb (kisebb), mint a régié α = 5%-os szignifikancia szinten, azaz az egyöntetübb szakitószilárdság miatt is az uj keverék alkalmazása célszerü!

5. Exportra készülő labdák gumibelsőjének sulyára a FIFA előirása: 120 ± ± 10 g. A jelenlegi gyártási feltételek mellett a belsők tapasztalati sulyeloszlása 120 ütemü minta alap-

ján számitva $s \cong 5,2$ g. Normális eloszlást feltételezve a sulyeloszlásnak 4,6 g-os szórást kellene elérni a fenti türéshatárok eléréséhez. Tekintsük ez utóbbit alapsokasági szórásnak, és vizsgáljuk meg $\alpha = 5\%$-os, valamint $\alpha = 1\%$-os szignifikancia szinten, hogy származhat-e fenti gyártási mintánk egy $\sigma = 4,6$ g-os szórásu sokaságból?

Megoldás

Példánkban ismét minta szórást kell alapsokasági szórással összevetnünk. Mivel ez esetben s .... σ, a számlálóba a .... varianciája kerül.

$\sigma = 4,6$, $\sigma^2 =$ ....

$s = 5,2$, $s^2 =$ ....

Határozzuk meg most először a kritikus tartományokat mindkét szignifikancia szinten!

A számláló szabadságfoka: $f_1 =$
= ....,
a nevezőé: $f_2 =$ ....

A megfelelő táblázatok alapján igy:

F_k, 1% ....,

F_k, 5% ....

Induljunk ki abból a gyakorlati "megfontolásból", hogy az eltérés "ránézésre" nem tünik lényegesnek, és legyen ez a szakmai hipotézis.

H_{sz}................,ahol σ_1^2 az s_1 minta alapsokasági varianciája, a nullhipotézis ...., azaz

H_0........H_{sz} : ....,

minta

21,16

27,04

120 - 1 = 119

∞

$\geq 1,32$

$\geq 1,22$

$\sigma_0^2 = \sigma_1^2$

ezzel egyező

$=$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$

ami annyit jelent, hogy az s_1 = = 4,6 g szórásu fenti minta .... a σ = 4,6 g-os szórásu alapsokaságból.

A próba értéke: F_{sz} ....

Az α = 5%-os kritikus érték .... volt. Igy ez esetben a számitott érték ...., tehát a nullhipotézist ....

Ez az eltérés .... a véletlennek, hanem .... tulajdonitható. Mivel a nullhipotézissel a szakmai hipotézis példánkban ...., ez a következő szakmai értelmezést jelenti: ....
....
....
....
....
....
....
....

Az α = 1% érték 1,32 volt. Vonja le a fenti gondolatmenet szerint a szakmai következtetést ez esetre!
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

származhat

$\frac{27,04}{21,16} \cong 1,28$

1,22

a kritikus tartományba esik

nem fogadjuk el!

már nem

a ténylegesen fennálló különbségnek

megegyezik

a szórás értékében szignifikáns csökkenést kell elérnünk, hogy az előírásoknak eleget tegyünk, hiszen a mintánk szerint a gyártás szórása jelenleg nagyobb, mint a minimálisan szükséges!

Ezen a szinten (mivel F_{sz} = 1,28 és ez nem esik a kritikus tartományba) a nullhipotézist - és a vele megegyező szakmai hipotézist - elfogadjuk. Tehát nem mutatható ki szignifikáns eltérés a két szórás között, a számszerü eltérést a véletlen okozta: azaz lehetséges, hogy a 4,6 g-os szórásu sokaságból származik az 5,2 g-os minta.

Mint látható, már az 5%-os kritikus határhoz is közel volt a számitott érték, ezért célszerü ujabb - esetleg nagyobb elemszámu - mintán ellenőriznünk hipotézisünket!

A két eredmény tehát ellentmond egymásnak!

Mit lehet tenni ilyen esetben?

....
....
....
....
....
....
....
....

---

a normális

normális

6. Szilárd porok töltésére két különböző tipusu automata töltőgépet használnak. Azonos alappor töltése kapcsán 400 elemü minta alapján megállapitották a Hesser rendszerü gép szórását, amely 4,2 g (200 g-os névleges töltősuly termék esetén). Az ACMA gépről 250 elemü mintát vettek, amelynek szórása: 3,7 g. Szignifikánsnak mondható-e a két gép szórásának eltérése α = 5%-os szignifikancia szinten?

Megoldás

Példánkban két nagy elemszámu (több száz elemü) minta szórásait kell összehasonlitanunk. A szórások eltérését ekkor .... eloszlásra vonatkozó törvényszerüségek alapján vizsgálhatjuk, ugyanis az

$$u = \frac{|s_1 - s_2|}{s_d}$$ mennyiség ....

.... eloszlást követ.

Legyen szakmai hipotézisünk az, hogy az ujabb tipusu ACMA gép szórása jobb (azaz kisebb), mint a régebbi tipusu Hesser gépé, azaz:

H_{sz}:	$\sigma^2_{ACMA} < \sigma^2_{Hesser}$
A nullhipotézis ...., tehát:	ennek ellentéte
H_o:	$\sigma^2_{ACMA} = \sigma^2_{Hesser}$
Számitsuk ki a próba értékét!	
$u_{sz} = \frac{\lvert s_1 - s_2 \rvert}{s_d}$, ahol:	
$s_d = \sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}$	
$s_1 = s_{ACMA} = 3,7$ g; $s_1^2 = ...$	13,7
$s_2 = s_{Hesser} = 4,2$ g, $s_2^2 = ...$	17,6
$s_d = ...$	$\sqrt{\frac{17,6}{800} + \frac{13,7}{500}} = \sqrt{0,049} \cong 0,22$
$u_{sz} = ...$	$\frac{\lvert 3,7-4,2 \rvert}{0,22} = \frac{0,5}{0,22} = 2,27$
α = 5%-os egyoldali szinten az u táblázatból (az u táblázat ....!) a kritikus érték (ill. tartomány):	egyoldali $u \geqq 1,64$
mivel u_{sz} .... u_k, tehát	>
a ...., így	kritikus tartományba esik
a nullhipotézist ...., azaz a	elutasitjuk
szakmai hipotézist ....,tehát	elfogadjuk
a két szórás eltérése	szignifikánsnak mondható.

A két minta alapján az ACMA gép szórása szignifikánsan kisebb, tehát az ACMA gépekkel egyenletesebb töltősulyu késztermék gyártható (kisebb az eltérés a névleges 200 g-tól).

Értelmezze a szakmai következtetést!

....

....

....

....

....

....

....

....

7. Adott tipusu hőmérsékletszabályozók előirása a hitelesitési ponton: $120 \pm 3\ ^{o}C$. A terméket a gyártómü és a megrendelő is ellenőrizte egy adott szállitmány kapcsán, 40-40 db müszer leméréséval. A mérési eredmények szórása a gyártó müszerén (A) : $s_A = 1,54\ ^{o}C$, a megrendelő müszerén (B): $s_B = 1,17\ ^{o}C$. $\alpha = 10\%$-os szignifikancia szinten eltérő-e a két müszerre jellemző szórás?

(M: az eltérés szignifikáns; $F_{sz} = 1,7$, $F_{krit} = 1,51$; F próba)

8. Schirm szövetkenő gépen előállitott különböző szinü gumimatracok gumi és szövet közötti tapadását a szakemberek szerint a szövet szine befolyásolja. Véleményük az, hogy a használt kék szinü szövetek egyenletesebb (kisebb szórásu) tapadásu terméket eredményeznek. Egy kék szinü termék 40 elemü mintájának tapadási szóródása: 0,35 kp/cm, egy 60 elemü piros szinü matracmintánál ez: 0,48 kp/cm. Igazolható-e 90%-os megbizhatósággal a szakemberek állitása a fenti minták adatai alapján?

(M: $F_{sz} = 1,18$; az eltérés statisztikailag nem szignifikáns; $F_{krit} = 1,47$)

9. Két technológiai eljárás közül a kisebb szórásu technológiát kivánjuk bevezetni. A korlátozott lehetőségek miatt az A technológiával 15 próbadarabot gyártottak le, melyek korrigált tapasztalati szórásnégyzete: 17 mm^2, a B technológiával előállitott 12 mintadarabé viszont 31 mm^2. Egyértelmüen dönthetünk-e ezek alapján az A eljárás javára? (Válasszon $\alpha = 5\%$-os szintet!)

(M: $F_{sz} = 1,83$; az eltérés statisztikailag nem szignifikáns)

10. Határozza meg azt a szórásnégyzet értékét a B technológiára az előbbi (9.) példában, amelynél az eltérés az A ($\hat{s}_A^2 = 17\ mm^2$) értékéhez képest szignifikáns! (A mintaszámok változatlanok!)

(M: kb. $\hat{s}_B^2 \geqq 43,5\ mm^2$, az $s_B \geqq 6,6$)

11. Egy müszál szakitószilárdságának varianciája a jelenlegi gyártási körülmények között 56,6 kg^2. Uj gyártási eljárással csökkenteni kivánják

a szórást. A módositott eljárással gyártott müszáltételből 15 elemü mintát vettek, melynek szakitószilárdsági értékei:

151	148	161
156	160	154
147	149	162
153	160	163
155	156	149

Csökkent-e a variancia?

(M: $\hat{s}^2 \cong 29$. $\alpha = 10\%$-os szinten az eltérés szignifikáns, a többi szinten nem! A szórást ki kell számitani az adatokból)

12. A fejezet 6. példájában szereplő Hesser gépről különböző időpontokban vett minták átlagai és szórásai különbözőek. Egy müszakban vett három 50 elemü minta szórása sorrendben: 6,3 g, 5,2 és 6,7 g voltak. Az egyesitett 150 elemü minta szórása viszont (az átlagok eltérő helyzete következtében) 9,5 g. Szignifikánsan különböznek-e az egyes mintaszórások egymástól illetőleg az egyesitett eloszlás szórásától?

(M: $\alpha = 5\%$-os szinten a minták szórásainak eltérése nem szignifikáns - bár s_2 - s_3 esetén éppen a határon van, az egyesitett minta szórásától viszont mindegyik szignifikánsan eltér!)

13.* Az előző példához kapcsolódóan tételezzük fel, hogy a gépen zavartalan üzemmenet esetén (csak az elkerülhetetlen véletlen hibák hatnak) $\sigma = 5$ g-os alapsokasági szórás tartható. A szórás ellenőrzésére rendszeresen 25 elemü mintákat vesznek, melyek sulyszórását meghatározzák. Számitsa ki $\alpha = 5\%$-os ill. $\alpha = 1\%$-os szinten azt a kritikus mintabeli sulyszórás értékét, amely esetén az alapsokasági $\sigma = 5$ g-tól az eltérés már nem véletlen hatásoknak tulajdonitható! (Olyan zavar van a gyártási ill. töltési folyamatban, amely a szórást szignifikánsan megváltoztatta!!)

(M: a $\sigma = 5$ g-tól szignifikánsan különböző kritikus érték:
$\alpha = 1\%$ esetén: $s_k \geqq 6,7$ g
$\alpha = 5\%$ esetén: $s_k \geqq 6,2$ g)

6.12 Átlagok próbái

Átlagok próbáit vizsgálhatjuk ismeretlen alapsokasági szórás(ok), illetve ismert alapsokasági szórás(ok) esetén, ezen belül egyoldali vagy kétoldali szinten. Ismert alapsokasági szórás(ok) esetén u próbát, ismeretlen alapsokasági szórás esetén (a minta/minták) szórásai alapján t próbát alkalmazunk. Átlagpróbák analógiájára - u próba alapján - ellenőrizhetjük adott %-arányra vonatkozó hipotéziseinket is.

Az átlagpróbák egyik csoportja azt vizsgálja, hogy egy adott minta paraméterei (átlaga vagy %-aránya) származhatnak-e ismert alapsokasági paraméterü (várható értékü, vagy %-arányu) sokaságból.

Ismert μ várható értékü sokaságból származó minták átlagai μ körül - mint már az előző 5. fejezetből ismert - ismert alapsokasági szórás (σ) esetén $\sigma_{\bar{x}}$ szórással normális, ismeretlen alapsokasági szórás esetén a minta szórásából számitott $s_{\bar{x}}$ szórással Student (t) eloszlást követnek, mig π alapsokasági %-arányu sokaságból származó minták p %-arányai π körül σ_p szórással ugyancsak normális eloszlással ingadoznak. Ezek ismeretében épithetők fel adott mintára vonatkozó próbák: ha ugyanis $\bar{x}$ és μ (ill. p és π) eltérései egy (a t ill. u eloszlás alapján adott) kritikus értéken belül maradnak, akkor az adott alapsokaságból származónak tekintjük őket, és az eltérést csak véletlen tényezőknek tulajdonitjuk. Ellenkező esetben az azonosságra vonatkozó nullhipotézist elutasitjuk, azaz a kérdéses mintát nem fogadjuk el az adott sokaságból származónak.

Egy adott átlagra vonatkozó próbák számitásaira alkalmazott összefüggések az alábbiak:

ismert szórás (σ) esetén:

$$u_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ismeretlen szórás esetén (minta szórás alapján):

$$t_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

Százalékarányra vonatkozó hipotézis esetén:

$$u_{sz} = \frac{p - \pi}{\sigma_p}$$

ahol: π = a sokaság feltételezett %-aránya

p = a minta %-aránya

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(100-\pi)}{n}}$$

A fenti módon számitott értékek nem haladhatják meg igaz nullhipotézis (a minta a sokaságból származik) esetén α szignifikancia szinten az u ill. t eloszlás megfelelő egyoldali illetve kétoldali kritikus értékeit.

Az átlagpróbák másik csoportja két minta átlagainak (ill. %-arányainak) összehasonlítására alkalmas, azaz azt vizsgálja, hogy a két minta azonos alapsokaságból származik-e. Ismert alapsokasági szórások (σ_1, σ_2) esetén - ha a nullhipotézis igaz - a $D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ (a két minta átlagainak eltérése) változó egy 0 várható értékü és σ_D szórásu normális eloszlást követ, mig ismeretlen alapsokasági szórások esetén D ugyancsak 0 várható értékü, de s_D szórásu és Student (t) eloszlásu. Ez utóbbi esetben, ha az ismeretlen szórások azonosságát nem tételezzük (tételezhetjük) fel, un. Aspin-Welch próbát kell alkalmaznunk (ez csak a szabadságfok eltérő számitásában különbözik a t próbától!).

Két minta %-arányainak azonosságát hasonló elven az alapján ellenőrizhetjük, hogy eltérésük (az azonos alapsokasági %-arány következtében) egy 0 várható értékü és s_p szórásu normális eloszlásu valószinüségi változó.

Speciális átlagpróba két minta adatainak összehasonlitására a pározott adatok t próbája. Ezt olyan esetben alkalmazhatjuk, ha bizonyos - a kisérlet, a vizsgálat szempontjából érdektelen - külső zavaró tényezők (pl. a vizsgált személy, vagy a vizsgáló személye) hatását ki akarjuk szürni az eredményekből. Ilyenkor a vizsgálati értékek megfelelően párositott különbségeivel számolunk, igy e külső tényezők zavaró hatása kiesik. A nullhipotézis (a két minta azonos) fennállása esetén a páronkénti különbségek egy 0 várható értékü, s_d szórásu Student eloszlásu valószinüségeloszlás változói, igy a próba elvégezhető. E próba további előnye, hogy az ismeretlen szórások azonosságát nem kell feltételeznünk, és az egyes minták összetartozó adatainak nem kell függetlennek lenni egymástól.

Két átlag azonosságára vonatkozó számitások összefüggései az alábbiak:

Ismert alapsokasági szórások (σ_1 és σ_2) esetén:

$$u_{sz} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_D}, \qquad \text{ahol:} \qquad \sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ismeretlen szórások esetén (a minták s_1 ill. s_2 szórásai alapján számolva):

$$t_{sz} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_D}, \qquad \text{ahol:} \quad s_D = \hat{s}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_2^2}{n_2}},$$

$$\text{ill.:} \quad \hat{s} = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

a t eloszlás szabadságfoka pedig: $f = n_1 + n_2 - 2$.

Az emlitett Aspin-Welch próba esetén a t_{sz} értékét ugyanigy számitjuk, viszont a szabadságfok számitása a következőképpen történik:

$$f = \frac{1}{\frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}}, \quad \text{ahol:} \quad c = \frac{\hat{s}_1^2 \cdot n_2}{\hat{s}_1^2 \cdot n_2 + \hat{s}_2^2 \cdot n_1}$$

mivel ekkor f legtöbbször nem egész szám, ezért a legközelebbi táblázati értékkel számolunk.

Két százalékarány összehasonlitása esetén:

$$u_{sz} = \frac{p_1 - p_2}{s_{\bar{p}}}, \quad \text{ahol:} \quad s_{\bar{p}} = \sqrt{\hat{p}\,(100-\hat{p})\,\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}},$$

illetve:

$$\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{a_1 + a_2}{n_1 \cdot n_2} \cdot 100$$

<u>itt:</u> a_1 és a_2 a mintákban talált p_1 illetve p_2 valószinüségi változók száma (pl. a nem megfelelő darabok száma)
(p_1 és p_2 értékét %-ban mérjük)

a pározott adatokra vonatkozó próbára:

$$t_{sz} = \frac{\bar{d}}{\frac{\hat{s}_d}{\sqrt{n}}} \quad \text{ahol:} \quad \bar{d} = \frac{\Sigma(x_{1i} - x_{2i})}{n} = \frac{\Sigma d_i}{n}$$

$$\hat{s}_d^2 = \frac{\Sigma d_i^2 - \frac{(\Sigma d_i)^2}{n}}{n - 1}$$

és $f = n - 1$

Több átlag összehasonlitására a 6.2 részben tárgyalásra kerülő variancia-analizis alkalmas.

FELADATOK

1. A kereskedelmi gázolaj megengedhető kéntartalmának elérése érdekében az elsődleges gázolajat kénmentesitő folyamatnak kell alávetni. A megengedett szabványértékét csak akkor tudják biztositani, ha a folyamatba érkező elsődleges gázolaj kéntartalma átlagosan nem haladja meg a 0,55 sulyszázalékot. Ismeretlen összetételü kőolaj feldolgozása során n = 200 elemü minta vizsgálatai az alábbi értékeket adták:

$\bar{x}$ = 0,575 s%, s = 0,165 s%.

Kielégiti-e a feldolgozási folyamatról lejövő gázolaj a fenti feltételt, vagy szükséges módositanunk a technológiát?

Megoldás

A szabvány előirása alapján ismert az "alapsokaság" legfeljebb elérhető kéntartalmának értéke: μ = 0,55 s%.

Példánkban .... határ érdekes a vizsgálat szempontjából, ezért, ... oldali próbát kell végeznünk. Mivel a vizsgált minta elemszáma eléggé nagy (n = 200), a gyakorlatban jó közelitéssel feltételezhetjük a .... eloszlást, és az ismeretlen alapsokaság varianciáját (σ^2) pontbecslés utján helyettesithetjük ....

....

azaz ....

Igy az adott feltételek mellett (ismert μ és σ, n > 50) a hipotézis vizsgálatára .... próbát alkalmazhatunk.

csak a felső

egy-

normális

a mintából számitott varianciával
$s^2 \cong \sigma^2$

u

Példánkban a szakmai hipotézis az, hogy a minta átlaga (tehát a gyártófolyamatról lejövő gázolaj átlagos kéntartalma) és a megengedhető érték eltérése lényegesnek tünik, azaz (ha μ_t az $\bar{x}$ -hoz tartozó tényleges várható érték):	
H_{sz}	$\mu_t \neq \mu$
A szakmai hipotézis ebben a formában............................	nem bizonyitható
.............., ezért fel kell állitanunk	a nullhipotézist.
A nullhipotézis példánkban	nem egyezik meg
a szakmai hipotézissel, ennek ....:	ellentéte
H_o:	$\mu_t = \mu$
ami azt jelenti, hogy	a lejövő gázolaj kéntartalma egy jónak tartott, legfeljebb 0,55 s%-os folyamatból származik.
Válasszunk α = 5%-os szignifikancia szintet, melynek a példa jellegéből fakadóan .... oldali értelmezése szükséges.	egy
Mivel az u (normális) eloszlás táblázata .... táblázat, a kritikus érték a	egyoldali
....	$\Phi(u) = \Phi(1 - 0,05) =$
....	$= \Phi(0,95)$
helyen található táblázati érték, azaz:	
u_{krit} ...., illetve a	$= 1,64$
kritikus tartomány: ....u........	$- 1,64 >$ $> 1,64$
A példa adatai:	
μ = ..., n = ...	0,55 s% , 200
$\bar{x}$ = ..., és mivel s^2.......σ^2	0,575 s% , $\cong$

$\cong s = 0,165\ s\%$

$$\frac{0,575 - 0,55}{\frac{0,165}{\sqrt{200}}} =$$

$$= \frac{0,025 \cdot 14,1}{0,165} = 2,11$$

2,11

$\geq 1,64$

nagyobb
a kritikus tartományba
esik
nem fogadjuk el
ellentétes
viszont elfogadjuk

igy: σ.........................

Az u számitott értéke ezek alapján:

$$u_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \text{..................}$$

A minta alapján számitott érték
(u_{sz} = ...),
a kritikus tartomány viszont u_k......

A mintából számitott érték..........
.............., mint a kritikus
érték, azaz........................,
.... ezért a nullhipotézist
.... a vele
.... szakmai hipotézist
....

Ez annyit jelent, hogy a vizsgált gázolaj kéntartalma ($\bar{x}$ = 0,575 s%) és a legfeljebb elérhető kivánatos érték (μ = 0,55 s%) között (α = 0,05 és n = 200 mellett) statisztikailag szignifikáns különbség mutatkozik, tehát célszerü olyan technológiai változtatást végrehajtani, amely nagyobb mértékben csökkenti az elsődleges gázolaj kéntartalmát.

2. Kerékpártömlők minősitésében rendkivül fontos paraméter a tömlő szakitószilárdsága. A 6.11 fejezet 4. példájában emlitett kerékpár köpenyek exportjához tartozó tömlők eddigi gyártási adatai sok éves tapasztalatok alapján a szakitószilárdságra az alábbi értéket adják:

μ_0 = 0,556 kp/mm^2.

Az exporthoz uj összetételü keveréket próbálnak ki, mely feltételezés szerint növeli a szakitószilárdságot. A gyártás technológiai feltételei egyébként azonosak a korábbi gyártás körülményeivel. A kisérleti gyártás 50 elemü mintájának adatai:

$\bar{x} = 0,624 \text{ kp/mm}^2$, $s = 0,173 \text{ kp/mm}^2$.

Javult-e az uj keverék által a tömlők szakitószilárdsága?

Megoldás

Példánkban sok éves gyártás ismert várható értékéhez képest kell minősitenünk egy kisérleti gyártás mintájának adatait. A jelenlegi gyártásra vonatkozóan szórások nem ismeretesek, igy a .... szórása alapján kell elvégeznünk a statisztikai próbát, tehát .... próbával fogunk dolgozni.

minta

t (Student).

Szakmai hipotézisünk nyilvánvalóan a kisérletsorozat indoka, azaz.... ....

az uj keverék alkalmazásával nő a gyártott tömlők szakitószilárdsága.

Megfogalmazva: H_{sz}: ....

$\mu_0 < \mu_{kis}$

Nullhipotézisünk........... lehet, azaz:

csak ennek ellentéte

H_0: ....

$\mu_0 = \mu_{kis}$

Vizsgáljuk hipotézisünket $\alpha = 2\%$-os, kétoldali szinten (nem zárhatjuk ki, hogy a minta esetleg egy alacsonyabb várható értékü tételből származik, mint a régi gyártásé, ezért célszerü kétoldali szint, viszont mivel a magasabb várható értéket erősebben szignifikáns esetben akarjuk csak elfogadni - hiszen ez a gyártás átállitását jelenti az uj keverékre -, ezért célszerü 5%-nál "szigorubb" α -t venni).

A .... eloszlás kritikus értéke a .... oldali α =....... oszlopban található, mégpedig - mivel a t eloszlás függ a ....is, és esetünkben az f = ..., azaz a 40. és 60. sor közé esik, e két érték között lesz a kritikus érték: az f = 40 sorban:

t_{krit}= ....

az f= 60 sorban: t_{krit}= ....

a kritikus érték tehát: t_{krit}.........

illetve a kritikus tartomány:

.... t ....

azaz a számitott érték 2,4-nél........ ill. - 2,4-nél .... nem lehet!

Határozzuk meg adataink alapján a próba számitott értékét!

μ_0= 0,556 kp/mm^2, $\bar{x}$=0,624 kp/mm^2

n= 50 , s=0,173 kp/mm^2

$t_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$, ahol: $s_{\bar{x}}$ = ...

azaz: t_{sz} = ...

A kritikus érték: t_{krit}......... A számitott érték pedig: t_{sz}....... tehát, t_{sz}.........t_{krit}, azaz .... esik.

t

két, 0,02

szabadságfoktól

50 - 1 = 49

2,42

2,39

≅ 2,40

- 2,4 > > 2,4

nagyobb

kisebb

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

$$\frac{0,624-0,556}{\frac{0,173}{\sqrt{49}}} \doteq \frac{7.0,068}{0,173} =$$

≅ 2,75

≧ 2,4

= 2,75,

a kritkus tartományba

A nullhipotézist tehát .... és igy .... a szakmai hipotézist.	elvetjük elfogadjuk
Az uj keverékkel gyártott tömlők szakitószilárdsága................ .... tehát az uj keverék	szignifikánsan jobb a régi keverékből gyártottakénál, bevezetése mellett döntünk

---

3. Az 5. fejezet 1. példájában emlitett BCMO-1-es anyagból készült csapok hőkezelés utáni keménységvizsgálatát egy 20 000 db-os szállitmányból vett 250 elemü mintán vizsgálták. E mintában 27 db nem felet meg az előirásoknak. (53,6 és 66,5 HRc között kell lennie a keménységnek.) Az üzem sokévi ellenőrzési statisztikái szerint e csapok minőségszintje (a megfelelő darabok %-arányával mérve e szintet): 92,5%.

   Eltér-e a gyártási tétel a sokévi átlagszinttől?
   Vizsgáljuk a problémát 99%-os megbizhatósági szinten!

   <u>Megoldás</u>

   A sokévi minőségszintet felfoghatjuk, mint az adott gyártási rendszer alapsokasági százalékarányát (π_o), amelyet az erre jellemző körülmények mellett (anyag, technológia, berendezések, munkahelyi körülmények stb.) átlagosan elérhetünk.
   Ily módon egy adott minta százalékarányát kell ezzel összehasonlitanunk. Mivel π_o körül az ebből származó p %-arányu minták σ_p szórással .... eloszlást követnek, a

   (normális)

u

$\frac{27}{250} \cdot 100 \cong 10{,}8\%$

$100 - 10{,}8 = 89{,}2\%$

$\pi_t > \pi_o$

viszont ennek ellentéte

$\pi_t = \pi_o$

92,5%, 250

$\sqrt{\frac{92{,}5 \cdot 7{,}5}{250}} = \sqrt{2{,}8} \cong 1{,}7$

$\frac{89{,}2-92{,}5}{1{,}7} = \frac{-3{,}3}{1{,}7} = -1{,}94$

0,99

%-arányra vonatkozó .... próba alapján igazolhatjuk hipotézisünket.

Először határozzuk meg az adott tételre jellemző minta minőségszintjét! A nem megfelelő darabok %-arányát:

p_s = ..., a minőségszint

igy: $p_{megf.}$ ....

Legyen szakmai hipotézisünk, hogy e minta minőségszintje alacsonyabb a sokévi átlagnál (pl. mert ez már 90% alatt van).

A szakmai hipotézis tehát (ha π_t a 20 000 db-os minta tényleges minőségszintje):

H_{sz}: ...., a nullhipotézis ...., azaz:

H_o: ....

A százalékarányra vonatkozó u próba számitott értéke:

$$u_{sz} = \frac{p-\pi}{\sigma_p}, \quad \text{ahol: } \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(100-\pi)}{n}}$$

példánkban: π =......., n =.......

igy: σ_p = ...

A számitott érték pedig:

$$u_{sz} = \frac{p-\pi}{\sigma_p} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

A kritikus u értéket - mivel a megbizhatósági szint: ε = 99% - az u táblázat $\Phi(u)$ = ...

értékénél kapjuk, azaz a szignifikancia szint	1%
A kritikus tartomány: ....u	- 2,33 >
....	> 2,33
Példánkban a próba számitott értéke (-1,94) .... tartományba..........................,	a kritikus nem esik bele
igy a nullhipotézist	elfogadjuk
azaz egyuttal a szakmai hipotézist	elvétjük.
Ez tehát azt jelenti, hogy tételünkben a selejtes darabok (ill. a megfelelő darabok) % aránya	
.... a sokévi átlagértéktől, tehát annál	nem tér el szignifikánsan nem rosszabb.

4. A hütőipar a mezőgazdaságtól átvett zöldborsót tenderométeres vizsgálat alapján minősiti. A müszerrel a borsószemek nyirószilárdságát mérik szabványos (adott térfogatu) mintaelemeken. Azonos körülmények között termett Juwel és Durana fajták vizsgálati eredményei 1972. évi termés alapján az alábbiak voltak (Juwel: 40 mintán, Durána 28 mintán):

$\bar{x}_J = 138,5\ t^o \qquad \bar{x}_D = 126,1\ t^o$

A sokévi adat alapján ismert a két adott területen termelt fajta tenderométer fokainak szórása:

$$\sigma_J = 15\ t^o, \quad \sigma_D = 21\ t^o$$

Különbözik-e minőségileg a két zöldborsófajta egymástól? (A kisebb tenderométer foku a zsengébb, tehát jobb minőségü!)

$\mu_D < \mu_J$

$\mu_D = \mu_J$

azonosnak

u

standard normális
$(1 - \alpha/2)$,
0,975
$\pm 1,96$

kritikus,
$-1,96 >$ $>1,96$

$138,5\ t^o$, $126,1\ t^o$

$15^2 (t^o)^2 = 225\ (t^o)^2$,

$21^2 (t^o)^2 = 441\ (t^o)^2$

40, 28

$$\sqrt{\frac{225}{40} + \frac{441}{28}} = \sqrt{5,65+15,8} = \sqrt{21,45} \cong 4,6\ t^o$$

Megoldás

A szakemberek feltevése szerint a Durána tipus zsengeségét tekintve kedvezőbb fajta. Legyen ez példánk szakmai hipotézise:

H_{sz}: ....

Nullhipotézisünk: H_o ....

azaz a két tipust zsengeségét tekintve .... tételezzük fel.

Az alapsokaságok szórásait ismerjük, ezért a két átlag összehasonlítását .... próbával végezhetjük el.

Válasszunk $\alpha = 5\%$-os, kétoldali szignifikancia szintet. A............ eloszlás táblázatából a $\Phi(.......) = \Phi(.......)$ helyen található kritikus érték: u_{krit} = ... avagy a .... tartomány: .... u ....

A próba értékét az alábbi összefüggés adja:

$$u_{sz} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_D}, \text{ ahol: } \sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Adataink:

$\bar{x}_1 = \bar{x}_J$ = ..., $\bar{x}_2 = \bar{x}_D$ = ...

$\sigma_1^2 = \sigma_J^2$ ....

$\sigma_2^2 = \sigma_D^2$ ....

$n_1 = n_J$ = ..., $n_2 = n_D$ = ...

Ezek alapján:

σ_D = ...

$$u_{sz}^{*} = \frac{\bar{x}_J - \bar{x}_D}{\sigma_D} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{138,5-126,1}{4,6} = \frac{12,4}{4,6} \cong 2,7$$

A kritikus érték 1,96, igy mivel
u_{sz} (......) ......1,96 ,

(2,7) , >

azaz a ....,

a kritikus tartományba esik

a nullhipotézist ...., a szakmai hipotézist ....

elvetjük
elfogadjuk

Értelmezze ezt a következtetést szakmailag a példa problémájára!
....
....
....
....
....

A két különböző fajtáju zöldborsó zsengesége szignifikánsan különbözik. A Durana tipus zsengébb, tehát jobb minőségü.

5. A 6.11 fejezetrész 3. példájában szereplő uj szövetelőállitási technológia a gyürődésszög csökkenésén keresztül javitja a szövet minőségét a szakemberek feltételezései szerint. A régi és uj technológiával előállitott 30-30 elemü minta adatai a következők voltak:

	Láncirány	Vetülék irány
Régi technológia (1)	$\bar{x}_{\ell,1}=97^{o}$	$\bar{x}_{v,1}= 96^{o}$
	$s_{\ell,1}=8,9^{o}$	$s_{v,1}=9,8^{o}$
Uj technológia (2)	$\bar{x}_{\ell,2}= 89^{o}$	$\bar{x}_{v,2}= 83^{o}$
	$s_{\ell,2}=9,5^{o}$	$s_{v,2}=7,4^{o}$

Az emlitett példa F próbája a szórások között statisztikailag szignifikáns eltérést nem mutatott ki. Igazolható-e a szakemberek feltevése α = 5%-os szignifikancia szinten?

Megoldás

A szakmai hipotézis szerint az uj eljárás minőségjavulást ...., azaz a gyürődésszög ....
Megfogalmazva:

H_{sz}: ....

Matematikai statisztikai szempontból viszont azt kell vizsgálnunk, hogy a két minta származhat-e várható értékét tekintve ....
alapsokaságból.

Az igazolást az átlagok összehasonlítására vonatkozó alábbi nullhipotézissel végezhetjük:

H_o: ....

Az alapeloszlások szórása.........., igy a .... eloszlásra épülő........... próbát alkalmazzuk.

Mivel az előző 6.11 fejezet 3. példája alapján a szórások .... joggal tételezzük fel, nem szükséges Aspin-Welch próbát alkalmazni!

A t eloszlás kritikus értékéhez..... és a .... értékét kell ismerni.

Példánkban ezek: α = ...
f = ...

A kritikus érték igy: t_{krit}.......azaz, a.......... tartomány: ....t .....

A próba számitott értéke:

$$t_{sz} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_D}, \text{ ahol: } s_D = \sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_2^2}{n_2}}$$

eredményez
csökken

$\mu_1 > \mu_2$

azonos

$\mu_1 = \mu_2$

ismeretlen
Student (t),
t

azonosságát

α
szabadságfok

5%
$n_1 + n_2 - 2 = 58 \cong 60$
$= \pm 2{,}0$
kritikus, $-2 >, +2$

mivel itt a korrigált varianciák ismertek.

A láncirányu számitás:

s_D = ...

....

....

$t_{sz,\ell}$ = ...

A kritikus érték t ...., mivel a számitott érték ($t_{sz,\ell}$ = ...) ...., a láncirányra vonatkozóan a nullhipotézist............., a szakmai hipotézist .... Az uj eljárás tehát .... a láncirányu gyürődésszög értékét.

A vetülék irányu számitás:

s_D= ....

....

$t_{sz,v}$= ....

Ez az érték .... tartományba ...., ezért a .... itt is elvetjük, a .... hipotézist ....

Értelmezze az eredményt szakmailag!

....

....

....

....

....

....

....

$$\sqrt{\frac{8,9^2}{30}+\frac{9,5^2}{30}} = \sqrt{\frac{79,2+90,2}{30}} = \sqrt{5,65} = \cong 2,4^o$$

$$\frac{97-89}{2,4} = \frac{8}{2,4} \cong 3,2$$

$\geqq 2$

3,2, ebbe a tartományba esik

elfogadjuk
elvetjük
javitja

$$\sqrt{\frac{9,8^2+7,4^2}{30}} = \sqrt{\frac{96,0+54,8}{30}} \cong \sqrt{5} \cong 2,2^o$$

$$\frac{96-83}{2,2} = \frac{13}{2,2} = 5,9$$

szintén a kritikus
esik, nullhipotézist
szakmai
elfogadjuk

Az uj eljárással előállitott szövetek gyürődésszöge mindkét irányban szignifikánsan javult, tehát a minőségjavulás következtében célszerü ezzel az eljárással dolgozni.

6. Adott tipusu hőmérsékletszabályozók minden egyes darabját - biztonsági okokból - a gyártóműnél végellenőrzéskor, valamint a megrendelőnél átvételkor ellenőrzik. Az ellenőrzött méret előírása 120 $\pm$ 3 ^oC. A megrendelőtől számos reklamáció érkezett a leszállitott szabályozók pontosságára vonatkozóan. A gyártómű - a belső ellenőrzések megfelelő adatai alapján - azt tűzte ki feladatul, hogy megvizsgálja a megrendelő hitelesitő műszerét: nem mutat-e ez olyan pontatlanságot, amely a kapcsolási pontok eltérését okozhatja? A vizsgálat érdekében a gyártó és megrendelő együttes vizsgálattal 40-40 db véletlenszerűen kiválasztott szabályozó értékét műszereivel meghatározta. A mérések eredményei:

A gyártó műszerén:

$$\bar{x}_A = 119{,}8\ ^oC \quad s_A = 1{,}54\ ^oC$$

A megrendelő műszerén:

$$\bar{x}_D = 121{,}2\ ^oC \quad s_B = 1{,}17\ ^oC$$

A műszerek mérési pontossága (eltérése) okozhatja-e a reklamációban jelzett eltéréseket?

Megoldás

A vizsgálatot azonos sokaságból vett minták paramétereinek összehasonlitásával végezzük és ez alapján döntünk arról, hogy a két mérőeszköz egyenértékű-e, nincs-e méréseik között valamilyen szisztematikus eltérés?

két átlag

Az eltérés vizsgálatára .... összehasonlitására vonatkozó statisztikai próbát alkalmazhatunk.

Példánkban .... szórásai ismeretlenek, ezért a ...... szórásaival dolgozunk, tehát ...... próbát alkalmazunk.
A két minta szórását megvizsgálva jelentős eltérést láthatunk, ezért tételezzük fel, hogy az ismeretlen alapsokasági szórások nem azonosak. (Az F próba valóban ezt adja: lásd a 6.11 rész 7. gyakorló feladatát!!). Ez esetben egyszerű..... próba .... , hanem az un. .... próbát kell alkalmaznunk, mely a t próbától csak a .... számitásban tér el.

A gyártómű szakmai hipotézise szerint a megrendelő szisztematikus hibával mér az övéhez képest, azaz példánk szakmai hipotézise:

H_{sz}: ....
A nullhipotézis ....,azaz
H_o: ....

Végezzük a számitást $\alpha = 5\%$-os szinten! Az emlitettek miatt Aspin--Welch próbát kell alkalmaznunk, ahol a .... külön számitással kell meghatároznunk. Az összefüggés:

$$f=\frac{1}{\frac{C^2}{n_A-1}+\frac{(1-C)^2}{n_B-1}}\text{, ahol:}$$

$$C=\frac{\hat{s}_A^2\cdot n_B}{\hat{s}_A^2\cdot n_B+\hat{s}_B^2\cdot n_A}$$

példánkban $\hat{s}^2 \cong s^2$, mivel ....,

az alapsokaságok
minták
t
t
nem alkalmazható
Aspin-Welch
szabadságfok
$\mu_A \neq \mu_B$
ennek ellentéte
$\mu_A = \mu_B$
szabadságfokot
$n > 30$

$$\frac{1,54^2 \cdot 40}{40(1,54^2+1,17^2)} = \frac{2,4}{3,8} =$$

$= 0,63$

$$\frac{1}{\frac{0,63^2+0,37^2}{39}} =$$

$$= \frac{39}{0,54} \cong 72$$

t , 0,05

60 , 120

1,99
kritikus

$-1,99>$ $>1,99$

$$\sqrt{\frac{40(2,4+1,4)}{78}} = \sqrt{1,95} \cong 1,4$$

igy:

C = ...

....

tehát: f = ...

....

A kritikus érték igy már meghatározható:

A .... táblázat α = ... oszlopában
az f=......... ill. f= .... sorok közötti érték:
t_{krit} = ... illetve a .... tartomány:

.... t ....

A próba számitott értéke:

$$t_{sz} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_D}, \text{ ahol: } s_D = \hat{s}\sqrt{\frac{n_A+n_B}{n_A \cdot n_B}}$$

$$\text{ill. } \hat{s} = \sqrt{\frac{n_A s_A^2 + n_B s_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

mivel példánkban s_1 és s_2 szórások ismertek.

Adataink: $s_A^2 = 1,54^2 \cong 2,4$; $n_A = n_B = 40$

$s_B^2 = 1,17^2 \cong 1,4$, ezek alapján

először $\hat{s}$ értékét, majd s_D-t határozzuk meg.

$\hat{s}$ = ...

$s_D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$1,4\sqrt{\frac{40+40}{40.40}} = 1,4\sqrt{0,05} \cong 0,31$
Az igy kiszámitott adatokkal a paraméter megadható: $t_{sz} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_D} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\frac{119,8-121,2}{0,31} = \frac{-1,4}{0,31} \cong -4,5$
Mivel a $t_{sz} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{krit,}$ viszont mindkettő negativ,	$<$
tehát t_{sz} .... tartományba .....,	a kritikus , esik
igy a nullhipotézist ...., a szakmai hipotézist	elutasitjuk elfogadjuk
Értelmezze ezt az adott szakmai próbára!	A statisztikai próba, viszonylag nagy minták alapján, a két mérőeszközzel mért paraméterek várható értékei között szignifikáns különbséget adott, igy a reklamáció oka valószinüleg a két mérőeszköz közötti szisztematikus eltérésben keresendő.

7. A BCMO-1 anyagból készült alkatrészek keménysége a fejezet 3. példájában emlitett 53,6 és 66,5 HRc között kell legyen. Két különböző időszakból - egy hónap két dekádjából - származó ellenőrzési adatok szerint az első dekád MEO által vizsgált 250 db-jából 27 db nem felelt meg a fenti előirásnak, mig a második dekádban megvizsgált 450 db-ból 20 db. Azonos technológiai feltételek voltak-e a két dekádban (azaz azonos sokaságból szár-

mazik-e két minta?) Végezzünk statisztikai próbát $\alpha = 0,05$ szignifikancia szinten!

Megoldás

Az első dekádban gyártott termékek 8 tételben kerültek eladásra, és ebből 3 alkalommal már reklamáció merült fel a megengedett 5%-os selejtszint tullépése miatt.

Tételezzük fel ezért, hogy a két időszakban nem voltak azonosak a gyártási körülmények, azaz feltehetően az első dekádban olyan szisztematikus hibák befolyásolták a folyamatot (pl. nyersanyaghibák, rossz gépbeállítások, emberi tényezők pl. hiányzás miatti helyettesités), amelyek magasabb selejtszintet eredményeztek. Legyen ez a szakmai feltevés, azaz megfogalmazva:

$\pi_1 > \pi_2$

H_{sz}: ....

véletlen

azonos

A nullhipotézis szerint viszont az eltérés csak .... tényezőknek tulajdonitható, azaz a két időszak selejtaránya...........

$\pi_1 = \pi_2$

H_o: ....

két százalékarány

u

A hipotézis ellenőrzésére felhasználható statisztikai próba a .... összehasonlitásra vonatkozó .... próba.

minták

Mivel az alapsokasági százalékarány ismeretlen, ezért a .... százalékarányai alapján kell számolnunk.

u $u_{krit} = \pm 1,96$

A kritikus érték $\alpha = 5\%$-os szinten (........ próbáról van szó): .....

A számitáshoz rendelkezésre álló adatok alapján:

$n_1 = 250$ db, $n_2 = 450$ db

$a_1 = 27$ db, $a_2 = 20$ db, itt a_1 és a_2 a mintában talált .... darabok száma;

ezek alapján: p_1 = ...

p_2 = ...

A próba számitott értéke:

$$u_{sz} = \frac{p_1 - p_2}{s_p}, \text{ ahol:}$$

$$s_{\bar{p}} = \sqrt{\hat{p}(100-\hat{p})\,\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}} \quad \text{és}$$

$$\hat{p} = \frac{a_1+a_2}{n_1+n_2}\cdot 100$$

Először ez utóbbiakat határozzuk meg!

$\hat{p}$ = ...

$s_{\bar{p}}$= ....

mivel tehát: p_1=.....%, p_2=.....%

$s_{\bar{p}} \cong$.....%, igy

u_{sz} = ...

A számitott u érték (......) a... .... tartományba .... (u_{sz}.........u_{krit}), tehát a nullhipotézist ...., a szakmai hipotézist egyben ...., azaz:

selejtes

$$\frac{a_1}{n_1}\cdot 100 = \frac{2700}{250} \cong 10,8\%$$

$$\frac{a_2}{n_2}\cdot 100 = \frac{2000}{450} \cong 4,5\%$$

$$\frac{27+20}{250+450}\cdot 100 = \frac{4700}{700} \cong 6,7\%$$

$$\sqrt{\frac{6,7.93,3.700}{450.250}} \cong \sqrt{\frac{435000}{112000}} =$$

$$\cong \sqrt{3,9} = 2$$

10,8 4,5

2

$$\frac{10,8-4,5}{2} = \frac{6,3}{2} \cong 3,15$$

3,15 ,
kritikus, esik

$>$

elvetjük
elfogadjuk

a két dekád folyamán a hőkezelés gyártási körülményeiben olyan különbségek mutatkoztak, amelyek a selejtszázalék szignifikáns eltérését okozták.

....
....
....
....
....
....
....

8. A 6. példában szereplő hőmérsékletszabályzók minősitésével kapcsolatos vizsgálatokat a gyártó és vevő jelenlétében vett véletlen mintákon végezték, és a méréseket mindkét müszeren azonos személy - a KERMI egy szakembere - végezte. A vizsgálatsorozat első tiz müszerén végzett mérésének tényleges eredményei az alábbiak voltak:

("A" a gyártó müszerén, "B" a megrendelő müszerén mért értékek):

	1.	2.	3.	4.	5.
A	119,7	117,4	121,0	118,8	122,4
B	120,9	119,8	122,4	120,1	123,4

	6.	7.	8.	9.	10.
A	119,0	117,8	118,9	122,7	119,8
B	123,6	119,1	118,9	124,5	120,6

Van-e szignifikáns eltérés a két méréssorozat eredményei között?

Megoldás

A példában szereplő feltételek kapcsán figyeljünk fel arra, hogy azonos hőmérsékletszabályozókat, azonos személy két különböző müszeren, azonos méréssel minősitett. Ha eltérés van mégis a két sorozat között, akkor ez csakis az egyetlen változó tényezőre vezethető vissza, ez pedig példánkban .... Ilyen esetekben igen előnyösen alkalmazható .... próbája, ennél ugyanis a külső tényezők (pl. esetünkben a müszer tényleges pontossága, a vizsgáló személyének szakértelme stb.) vizsgálat szempontjából zavaró részei kiszürhetők és a másodfaju hiba sem jelentősen növekszik.

Legyen szakmai hipotézisünk a 6. példában leirt: a gyártó szerint a megrendelő müszere és saját müszere között valamilyen szisztematikus eltérés van, azaz:

H_{sz}: ...., illetve a nullhipotézis ezzel .... lévén:
H_o: ....

Mivel ennél a próbánál a kisérlet ilyen párositásával elérjük azt is, hogy a kis mintaszám ellenére a másodfaju hiba (β) ...., igy vizsgálhatjuk a nullhipotézist .... megbizhatósággal. Ennek megfelelően legyen a szignifikancia szintje: $\alpha = 1\%$.

Határozzuk meg a kritikus értéket először.

.... próbáról lévén szó, a kritikus érték α értékén kivül a .... is függ. Példánkban ez: ....

A kritikus tartomány ily módon:

.... t ....

a két különböző müszer

a pározott adatok t

$\mu_A \neq \mu_B$
ellentétes,
$\mu_A = \mu_B$

nem nő jelentősen

nagyobb

t

szabadságfoktól
f = n - 1 = 9

-3,25> > 3,25

2.	3.	4.	5.	6.
-2,4	-1,4	-1,3	-1	-4,6
5,76	1,96	1,69	1	21,16

7.	8.	9.	10.	Σ
-1,3	0	-1,8	-0,8	-15,6
1,69	0	3,24	0,64	37,1

$$\frac{-15,6}{10} = -1,56$$

$$\sqrt{\frac{37,1 - \frac{(15,6)^2}{10}}{9}} = \sqrt{\frac{37,1-24,3}{9}} =$$

$$\cong 1,2$$

A pározott adatokra vonatkozó próba számitott értéke:

$$t_{sz} = \frac{\bar{d}}{\frac{\hat{s}_d}{\sqrt{n}}}, \quad \text{ahol: } \bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma(x_{Ai} - x_{Bi})}{n_2}$$

$$\text{és: } \hat{s}_d^2 = \frac{\Sigma d_i^2 - \frac{(\Sigma d_i)}{n}}{n-1}$$

mivel d_i és d_i^2 értékeire szükségünk van (valamint ezek összegére), célszerüen az alábbi táblázatba irjuk be az értékeket, melyeket következőképpen számithatunk (pl. az i=1-es szabályzó adataira):

$$d_1 = x_{1,A} - x_{1,B} = 119,7-120,9 = -1,2$$

$$d_1^2 = 1,44$$

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
d_i	-1,2					
d_i^2	1,44					

	7.	8.	9.	10.	Σ
d_i					
d_i^2					

Az adatok alapján: $\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n} = \ldots\ldots\ldots$

$s_d = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ezek ismeretében a próba számitott értéke:

t_{sz} = ...

A kritikus érték e tartományban:

t............-3,25.

A számitott t érték (.....)....
..........tartományba.........,
mivel

t_{sz}.....................t_{krit},
és mindkettő negativ - igy a ....
hipotézist elutasitjuk, egyuttal a
.... hipotézist elfogadjuk.

A méréssorozat egyedi mérései is azt mutatják tehát, hogy mivel a két sorozat értékei ....
.... egymástól, tehát
....
....
....
....
....
....
....

$$\frac{-1,56}{\frac{1,2}{\sqrt{10}}} = \frac{-1,56.3,13}{1,2} \cong -4,1$$

<

-4,1

a kritikus, esik

<

null

szakmai

szignifikánsan eltérnek

a két müszer között valamilyen szisztematikus hiba okoz eltérést, ez a reklamációk oka. Ezeket tehát egymáshoz kell igazitani (a türéshatár ismeretében)!

---

9. Egy adott összetételü AlMgSi ötvözetet az anódos oxidációk előtt a homogén szövetszerkezet kialakitása érdekében hőkezelésnek vetnek alá. Egy kisérletsorozatban azt vizsgálják, hogy befolyásolja-e a hőkezelés időtartama az anódos oxidáció során kialakuló oxidréteg vastagságát. A kisérlet során 10-10 próbadarabot 4 illetve 1 órás hőkezelésnek vetettek alá, majd oxidálták és megmérték az oxidréteg vastagságát. A következő eredményekre jutottak:

$\bar{x}_1 = 8,2$ mikron, $\hat{s}_1^2 = 6,6$ mikron^2

$\bar{x}_4 = 11,7$ mikron, $\hat{s}_4^2 = 3,6$ mikron^2

Helyes-e az a szakmai feltételezés, hogy a 4 órás kezelés szignifikánsan jobb értéket ad, azaz befolyásolja a hőkezelés ideje az oxidréteg vastagságát?

Megoldás

Szakmai feltevésünk az, hogy a hőkezelés ideje befolyásolja az oxidréteg vastagságát, azaz:

H_{sz}: ....

A nullhipotézis viszont csak az .... lehet:

....

Válasszunk $\alpha = 5\%$-os szignifikancia szintet!

A két átlag összehasonlítására, mivel az alapsokaság.........ismeretlen, ... próbát kell alkalmaznunk.

Az egyszerű t próba feltétele viszont a .... azonossága.

Azt, hogy $\hat{s}_1^2$ szignifikánsan nagyobb-e, mint $\hat{s}_4^2$ ....próbával ellenőrizhetjük. A jelölést ugy kell megválasztanunk, hogy a nagyobb szórásnégyzet a .... kerüljön, igy példánkban ide az .... fog kerülni.

Mivel $\alpha = 5\%$ és $f_n = f_{sz} =$........,

igy a megfelelő ($\alpha =$.....)...... táblázatból a kritikus tartomány: F.....

$\mu_1 \neq \mu_4$

azonosság

H_o: $\mu_1 = \mu_4$

szórása

t

szórások

F

számlálóba

$\hat{s}_1^2$

n-1=9

0,05 F

$\geq 3,18$

Számitsuk ki az F próba számitott értékét:

F_{sz}= ....

Mivel F_{sz}.......F_{krit}, tehát .....
.... a kritikus tartományba, igy a szórások .... vehetők, tehát nem szükséges .... próbát alkalmazni, hanem csak sima .... próbát.

$$t_{sz} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_4}{s_D}, \text{ ahol: } s_D = \sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_4^2}{n_2}}$$

mivel itt a korrigált varianciák ismertek,

s_D= ....

ennek ismeretében, mivel a példa szerint

$\bar{x}_1$=..........., $\bar{x}_4$= ....

a számitott érték:

t_{sz}=.............................

A szignifikancia szint 0,05, viszont a .... eloszlás értéke a .... is függ, mely esetünkben: ....

A táblázat megfelelő kritikus tartománya:

....

A példa adataival számitott t_{sz}= ...., a..............tar-

$$\frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_4^2} = \frac{6,6}{3,6} = 1,83$$

< nem

esik

azonosnak

Aspin-Welch

t

$$\sqrt{\frac{6,6+3,6}{10}} \cong 1$$

8,2 mikron , 11,7 mikron

$$\frac{8,2-11,7}{1} = -3,5$$

t ,

szabadságfoktól

$f = n_1 + n_2 - 2 = 18$

$t < -2,1$

-3,5 kritikus

esik
elvetjük
szakmai hipotézist

a hőkezelési idő befolyásolja a hőkezelést követő anódos oxidáció során kialakuló oxidréteg vastagságát (legalábbis ebben az 1-4 órás tartományban)

tományba ...., ezért
a nullhipotézist ...., a
.... elfogadjuk.

E szerint tehát ....
....
....
....
....
....
....
....

10. Polietilén fóliát gyártó gépsor optimális beállitása esetén a vastagság: $\mu_{opt} = 98$ μm.
A lehuzó szerkezet beállitását müszakonként vett 25 elemü mérés alapján ellenőrizik. Egy müszak méréssorozatának eredménye: $\bar{x} = 93$ μm. A gép vastagságra vonatkozó szórása ismert: $\sigma \approx 9$ μm.
Változtatnunk kell-e a beállitáson a következő müszak elején, azaz szignifikáns-e az eltérés az optimális szinttől? ($\alpha = 0,05$)

(M: az eltérés szignifikáns, hiszen $u_{sz} = -2,8$. Ismert szórásos kétoldali u próba)

11. Ragasztott technológiával készitett lábbelik talpfelerősitési szilárdságának növelése érdekében uj tipusu ragasztót vizsgálnak. A kisérleti gyártásból véletlenszerüen kiválasztott 30 pár talpfelerősitési szilárdságának adatai: $\bar{x} = 3,8$ kp/cm, a minta szórása: $s=0,9$ kp/cm.
A régi technológia értéke több ezer pár tényleges mérés alapján ismert: $\mu_r = 3,5$ kp/cm.
$\alpha = 0,01$ szinten javitja-e az uj eljárás a késztermék vizsgált paraméterét?

(M: az eltérés nem szignifikáns, mert $t_{1\%,\ krit} = 2,46$, a példa számitott eltérése: $t_{sz} = 1,84$.
Tehát nem szignifikáns a javulás. Egyoldali - csak az alsó határ érdekes! - t próba)

12. Gumimatracok élettartamát a gumi és szövet közötti tapadás befolyásolja. A szakemberek szerint e tekintetben a szin is befolyásol: a használt piros szinezék szemcsézettsége kedvezőtlenül csökkenti a tapadást a kék szinhez képest. 50-50 minta tapadásainak értéke:
$\bar{x}_p=1,51$ kp/cm, $\bar{x}_k= 1,68$ kp/cm. A szórások sokévi minták adatai szerint:
$\sigma_p=0,5$ kp/cm, $\sigma_k= 0,35$ kp/cm. Igazolható-e a fenti szakmai hipotézis?

(M: az eltérés már $\alpha= 0,05$ szinten sem szignifikáns: $u_{sz} = 1,4$; két átlag összehasonlitása, u próba)

13. Cipőiparban különböző tipusu (kötött, kötetlen) szalagszervezési mód-

szerekkel kisérleteznek. A vizsgálatok arra is kiterjednek, hogy adott módszer körülményei (technológiai sorrend bontása a szalagon belül, ütemidő, leterhelés, ösztönzés stb.) milyen hatást gyakorol a szalagon gyártott cipők leértékelésére (II. oszt, ill. szabvány alatti áruk). A V_1 szalag több müszakos termeléséből - a MEO jegyzőkönyvek adatai szerint - 2560 párból 141 pár II. osztályunak, 48 pár szabvány alattinak minősült. A K_2 szalagon 3120 párból II. osztályu 202 pár, szabvány alatti 97 pár. Hogyan itélhető meg a két szalagtipus a leértékelések számát tekintve? (Külön számoljon a II. osztályuakra, külön a szabványon kivüliekre!)

(M: A II. osztályuaknál: $u_{sz} = 1{,}58$, az eltérés nem szignifikáns $\alpha = 0{,}05$-től; a szabvány alattiaknál: $u_{sz} = 3$, az eltérés $\alpha = 0{,}05$ és $0{,}01$ szinten is szignifikáns; két százalékarányra vonatkozó u próba)

14. E7-60 jelü feszitett vasbeton födémgerendák (6,8 m gerendahossz, B.500 cementből) egyedi gyártását két brigád (piros, kék) végzi. Az előirt határnyomaték (M_H): 1580 mkp. Egy dekád termelése alatt ellenőrzött 32 db piros jelü gerenda fenti paraméterére az alábbi adatokat kapták: $\bar{x}_p = 1490$ mkp, $s_p = 115$ mkp. A kék gerendákból 26 db-ot ellenőriztek határnyomatékra: $\bar{x}_k = 1570$ kp, $s_k = 49$ mkp. A határnyomaték kialakult értékét a technológiai utasitások betartása (keverési arány, keverés, gőzölés, vibrálás stb.) befolyásolja. Eltérőnek itélhető-e meg a két brigád "technológiai fegyelme" az adatok alapján? (Vigyázzon a szórások azonosságára!)

(M: a két átlag eltérésére: a piros brigád átlaga szignifikánson rosszabb: $t_{sz} = 3{,}2$; a szórások (egyenetlenség) közötti eltérés is szignifikánsan rosszabb a piros brigád "javára": $F_{sz} \cong 5{,}3$; ez utóbbi miatt Aspin-Welch próbát kellett alkalmazni)

15. Hesser gépek szilárd por alaku terméket töltenek 200 g-os névleges sulyra. Egy adott müszak három különböző időpontjában ellenőrzésként vett 50 db-os minták adatai:

$\bar{x}_1 = 203{,}5$ g, $s_1 = 6{,}3$ g; $\bar{x}_2 = 196{,}0$ g, $s_2 = 5{,}2$ g; $\bar{x}_3 = 209$ g, $s_3 = 6{,}7$ g. Elemezzük az átlagos töltősuly eltolódásait $\alpha = 0{,}01$ szinten az adott müszakon belül! (Tételezzük fel az ismeretlen szórások azonosságát!)

(M: töltési átlag szignifikánsan eltolódott az egyes mintavételi időpontok közben, hiszen: $t_{1-2} = 6,5$, $t_{2-3} = -15$; ezért célszerü ezt rendszeresen ellenőrizni és a névleges suly köré "visszaszabályozni", mert sok alul ill. felültöltés lesz; két átlag összehasonlitására vonatkozó t próba)

16. Uj altatókat klinikai kisérletben próbálnak ki. Nyolc személynek először a "SLÁ'F" nevü gyógyszert adják be és mérik a 8 órás alvási időhöz viszonyitott ± eltérést órákban, majd ugyanezen személyekkel néhány nap után a "Slumm" fantázia nevü készitménnyel a kisérletet megismétlik. Az eredmények az alábbiak:

személyek	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Slumm	3	2 1/4	1/2	4	-1/4	1	1/2	3
SLÁF	1 1/2	- 1/2	- 1	1 1/2	-1/4	0	1	2

Van-e különbség a két gyógyszer hatása között?

(M: $t_{sz} = 3$, igy az eltérés $\alpha = 0,05$-nél szignifikáns, 0,01-nél nem! pározott adatok t próbáját alkalmazzuk!)

6.13 A másodfaju hiba számitása

Mint a 6. fejezet elméleti részéből már ismert, másodfaju hibát (β) akkor követhetünk el, ha hamis hipotézist vizsgálunk. A hibát az jelenti, hogy a hamis hipotézist a mintavételi véletlen következtében mintánk adatai alapján nem utasitjuk el.

Egy adott próba során a β számértéke bármely a hipotetikustól eltérő tényleges értékre (μ_t) kiszámitható. β értéke csökken, ha a (μ_h - μ_t) eltérés nő, illetve növeljük a mintaszámot - viszont nő, ha α értékét csökkentjük. Egy-egy adott próba során a (μ_h - μ_t) távolság függvényében felvehető az un. jelleggörbe, amely adott (μ_h - μ_t) eltérés esetén megadja a hamis hipotézis elfogadásának valószinüségét. A gyakorlatban ennél lényegesebb számunkra a próba erősségi görbéje, amely azt adja meg, hogy (a μ_h-tól való eltérést a σ egységében mérve) - adott μ_t értéke mellett a próba milyen valószinüséggel utasitja el a hamis hipotézist (μ_h).

A próba erőssége és β összefüggése: $e = 1 - \beta$. Egy próbát tehát akkor nevezhetünk erősebbnek egy másiknál, ha azonos mintaszám mellett ugyanolyan hamis hipotézist nagyobb valószinüséggel utasit el (pl. a paraméteres próbák erősebbek a nemparamétereseknél).

1. A 6.12 rész 14. gyakorló példájában vizsgált feszitett vasbeton födémgerendák egy másik tipusánál (G48-17) a pozitiv határnyomaték: $+M_H = 1700$ mkp.

A technológia szórása több éves gyártási adatok alapján ismert: $\sigma = 50$ mkp. Egy-egy átadásra kerülő tétel $+M_h$ értékét 25 gerenda tényleges megvizsgálásával ellenőrzik. Mekkora az 1700 kp-os elvi érték elfogadásának valószinüsége az alábbi tényleges $+M_t$ értékü tételek esetében: 1695 mkp, 1690 mkp, 1680 mkp, 1675 mkp, 1670 mkp és 1650 mkp? (Válasszuk α értékét 0,045-nek, igy kerek értékekhez jutunk.

Számitsuk ki 1690 és 1675 esetén $\alpha = 0{,}012$-re is a valószinüségeket!)

Megoldás

A gerendák gyártási előirása szerint $M_h = 1700$ mkp határnyomatékot kell elérni. Az ellenőrzés ennek vizsgálatával foglalkozik, igy példánkban a mérések hipotetikus várható értéke: $\mu_h = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | 1700 mkp.

Az ellenőrzést n=25 elemü minták átlagai alapján végzik, egy $\sigma =$ = 50 mkp szórásu alapsokaság esetén. Ismeretes, hogy a minták átlagai a .... körül............... eloszlással ingadoznak, mégpedig példánkban | sokaság várható értéke normális

.... standard szórással. | $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{50}{25} = 10$ mkp

2

2,5

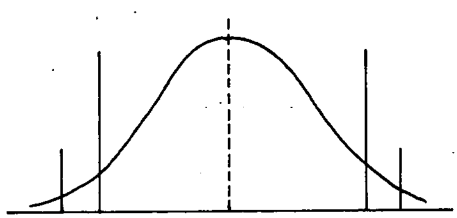
$\pm u_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}}$

$2.10 = \pm 20$ mkp

$2{,}5.10 = \pm 25$ mkp

$1680 < \quad < 1720$

$1675 < \quad < 1725$



E szerint tehát minden olyan minta-átlagot az 1700 mkp-os μ_h-ból szár-

Tételezzük fel, hogy a tényleges várható érték (μ_t) megegyezik az elérendő hipotetikussal (μ_h), azaz

$$\mu_t = \mu_h = 1700 \text{ mkp}$$

$\alpha = 0{,}45$ és $\alpha = 0{,}012$ esetén (kétoldali szinten vizsgálva) határozza meg a $\mu_h = 1700$ mkp nullhipotézis elfogadási határait!

$\alpha = 0{,}045$ esetén $u_\alpha = \dots\dots\dots\dots$

$\alpha = 0{,}012$ esetén $u_\alpha \doteq \dots\dots\dots\dots$

Az elfogadási tartomány általában:

$\Delta = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

esetünkben

$\alpha = 0{,}045$-re: $\Delta = \dots\dots\dots\dots\dots$

$\alpha = 0{,}012$-re: $\Delta = \dots\dots\dots\dots\dots$

azaz: $\dots\dots\dots\dots \bar{x} \dots\dots\dots\dots\dots$

illetve: $\dots\dots\dots \bar{x} \dots\dots\dots\dots\dots$

Ábrázolja ezt egy normális eloszlással!

670 680 690 1700 10 20 30

mazónak tekintünk - és igy a gyártott termékeket megfelelőnek tartjuk - amely $\alpha = 0,045$ szinten

........mkp és .... mkp között van.

Vizsgáljuk meg most egy $\mu_t =$ $= 1695$ mkp várható értékü tétel helyzetét!

Ábrázolja a megadott határokhoz képest (1680 és 1720) az ebből vett 25 elemü minták átlagainak eloszlását!

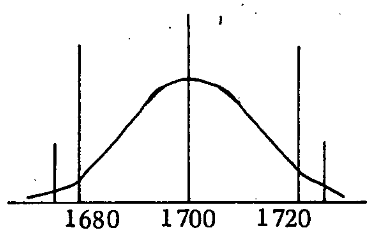
660 680 1700 20

Mint látható az egész eloszlás..... került .... mkp-os értékkel. Ez esetben viszont már a $\mu_h = 1700$ mkp-es hipotézis ...., tehát .... hiba elkövetésének veszélye fennáll. Határozza meg a β értékét a $\mu_t = 1695$ mkp-os esetre!

Az ....mkp és .... mkp között a $\mu_h =$.......... hipotézist elfogadjuk $\alpha = 0,045$ mellett. Itt viszont $\mu_t = 1695$ mkp, tehát a $\mu_h =$ .... mkp hipotézis .... A β értékét az adja, hogy milyen valószinüséggel eshet n=25 elemü minta átlaga a

1720 1680

$\mu_t = 1695$ mkp



lejebb
5

nem igaz
a másodfaju

1680 1720
1700

1700

hamis

1680 és 1720 mkp-os

1720 1680

normális

1695 , $\sigma_{\bar{x}}=10$ mkp

$\frac{1680-1695}{10}$, -1,5

-1,5 = 1-0,933=0,067

$\Phi\left(\frac{1720-1695}{10}\right)=\Phi(2,5)$

2,5 0,994

különbsége

2,5 , -1,5; 0,994-0,067

0,93

a másodfaju hiba (β)

közel van

$\mu_t = 1695$ mkp-os várható értékü és $\sigma = 50$ mkp-os szórásu alapsokaságból az .... határok közé,

azaz: P[..........> $\bar{x}$ >...........]

Az átlagok eloszlása ....,

μ_t=..........körül..........szórással.

Igy a keresett valószinüségek:

P[$\bar{x}$<1680] = Φ(........) = Φ(......)

és Φ(......) = ...=..........

P [$\bar{x}$ < 1720]= ....

Φ(........) = ...

A P[1720 > $\bar{x}$ > 1680) valószinüség a két érték ...., azaz:

Φ(........) - Φ(......) = ...

= ....

ami pontosan................értéke.

Látható tehát, hogy ez esetben igen nagy a β veszélye, ami annak következménye, hogy μ_t............. a μ_h értékéhez.

Határozza meg a fentiek analógiájára a $\mu_t = 1690$ mkp-s tényleges várható értékre vonatkozó másodfaju hibát!

Ábrázolja először az ebből származó minták eloszlásait (n = 25, σ = 50) a μ_h = 1700 mkp-s elfogadási határokhoz képest!

$\alpha = 0,045$ esetén:

$\beta = P(\ldots\ \bar{x}\ \ldots\ldots),$

azaz: $\Phi(\ldots\ldots) - \Phi(\ldots\ldots\ldots)$

táblázatból: $\beta = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\alpha = 0,012$ esetén:

$\beta = P(\ldots\ldots\ldots < \bar{x} < \ldots\ldots\ldots)$

azaz: $\Phi(\ldots\ldots) - \Phi(\ldots\ldots\ldots)$

táblázatból: $\beta = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

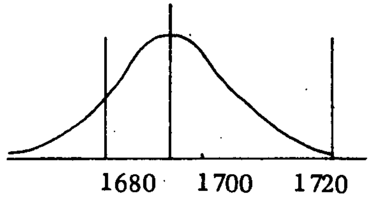
Látható tehát, hogy α csökkentésével a β értéke .... Ez esetben éppen akkora a β $\alpha = 0,012$ szinten, mint $\mu_t = 1695$ mkp esetén volt $\alpha = 0,045$ szinten.

Határozza meg β értékét 1680, 1675, 1670 és 1650 mkp esetekre is! (1675 esetén $\alpha = 0,012$-re is!)

$\beta_{1680} = \Phi(\ldots\ldots) - \Phi(\ldots\ldots\ldots) =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\mu_t = 1690$



1680 1720

$\frac{1720-1690}{10} = 3, \quad \frac{1680-1690}{10} =$

$= -1$

$0,998 - (1 - 0,841) = 0,74$

1675 1725

$\frac{1725-1690}{10} = 3,5; \quad \frac{1675-1690}{10} =$

$= -1,5$

$0,9998 - (1 - 0,9332) = 0,933$

nőtt

$\frac{1720-1680}{10} = 4, \quad \frac{1680-1680}{10} = 0$

$0,9999 - 0,5 \quad , \quad 0,5$

$\frac{1720-1675}{10}=4,5; \frac{1680-1675}{10}=0,5$

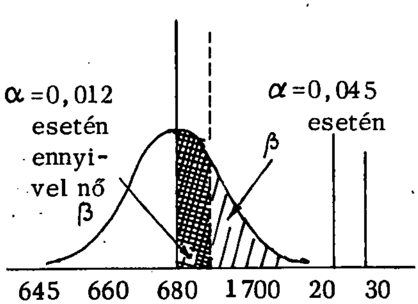
1-0,6915 , 0,31

$\frac{1725-1675}{10}=5, \frac{1675-1675}{10}=0$

1 - 0,5 0,5

1680

$\mu_t = 1675$



$\frac{1720-1670}{10}=5, \frac{1680-1670}{10}=1$

1 - 0,8413 , 0,16

$\beta_{1675} = \Phi(.......) - \Phi(.........) =$

$= .... = ...$

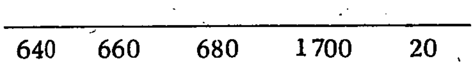
$\alpha = 0,012$ esetén $\mu_t = 1675$ mkp-re:

$\beta = \Phi(........) - \Phi(..........) =$

$= .... = ...$

Az α csökkentése esetén tehát β értéke ismét eléri a μ_t = ... mkp-s α = 0,045 szint értékét!

Ábrázolja ezt az esetet! A görbén sraffozással jelölje be β értékét mindkét α értékre!



Határozza meg μ_t = 1670 mkp esetén β értékét!

$\beta_{1670} = \Phi(......) - \Phi(.........) =$

$= ....\cong ....$

Határozzuk meg most a μ_t=1650 mkp esetét! Ábrázolja ezt diagramban és jelölje be β értékét!

$$\beta_{1650} = \Phi(\ldots\ldots) - \Phi(\ldots\ldots\ldots) =$$

$$= \ldots\ldots\ldots \cong \ldots\ldots\ldots\ldots$$

620 650 670 1700 1270

Ábrázoljuk most az adott esetre a próba erősségi görbéjét adataink alapján. Ezen, mint ismeretes a $(\mu_h - \mu_t)$ távolságot σ egységeiben visszük fel a vizszintes tengelyre, a függőlegesre pedig az erősség kerül (e) . e = ...

Igy példánkban:

μ_t=1495 mkp távolsága: -1/10σ β=0,93

μ_t=1490 mkp távolsága: ..... β=....

μ_t=1680 mkp távolsága: ..... β=....

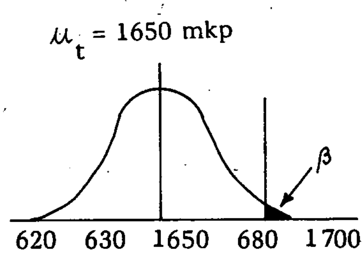
μ_t=1675 mkp távolsága: ..... β=....

μ_t=1670 mkp távolsága: ..... β=....

μ_t=1650 mkp távolsága: ..... β=....

$$\frac{1720-1650}{10} = 7, \quad \frac{1680-1650}{10} = 3$$

1 - 0,998 = 0,002

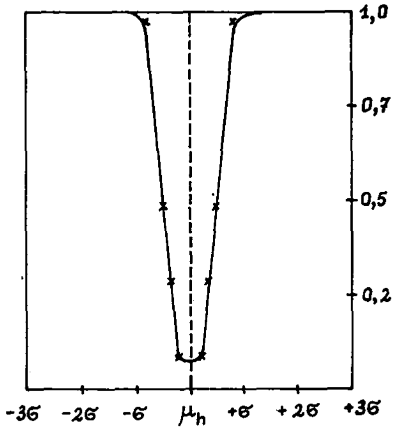


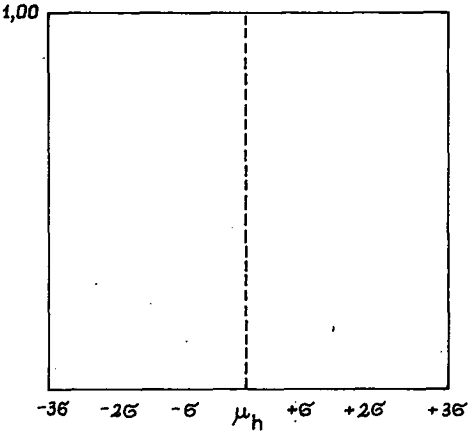
1 - β

-1/5 σ ,	0,74
-0,4 σ ,	0;5
-0,5 σ ,	0,31
-0,6 σ ,	0,16
- σ ,	0,002

ugyanakkora

A normális eloszlás szimmetrikus eloszlás ezért a $+1/10\sigma$, $+1/5\sigma$, $+0,4\sigma$, $+0,5\sigma$, $+0,6\sigma$ és σ értékek esetén a β ....
.........................., igy az erősségi görbe felrajzolható ($e = 1 - \beta$!!).





A görbéről leolvasható, hogy adott -σ egységében kifejezett - $(\mu_h - \mu_t)$ távolságok esetén $\sigma = 50$ mkp-s sokaságból vett n=25 elemü minták alapján milyen valószinüséggel utasitja el a próba a hipotézist, ha az hamis.

1,00 , tehát 100%

Határozza meg, hogy $+ 2\sigma$ eltérés esetén ($\mu_t = 1800$ mkp) milyen a próba erőssége!

e = ...

Határozza meg, hogy $\mu_t = 1660$ mkp-s esetben milyen a próba erőssége (e) és β !

A távolság: $(\mu_t - \mu_h) = \dots\dots\dots \sigma$,

0,8

a görbéről:

$e \cong \dots\dots\dots\dots$, $\beta = \dots\dots = \dots\dots$

0,93 , 1-0,93 = 0,07

Hogyan növelhető - α csökkentése nélkül - a próba erőssége esetünkben is? ....

A mintaszám növelésével.

Legyen n=50, változatlan feltételek mellett! Mennyire csökken a β μ_t=1680 mkp esetre (n= 25-nél 0,50 volt a β !) Ábrázolja előbb ezt az esetet! (Vigyázzon:

$\sigma_{\bar{x}} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$!)

$$\frac{50}{\sqrt{50}} \cong 7$$

A μ_h= 1700 mkp elfogadási határa

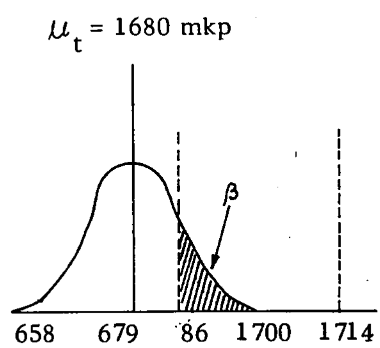
igy α = 0,045 esetén:

$\dots\dots\dots > \bar{x} > \dots\dots\dots$

1714 1686

Ábrázolja most már az eloszlást ezekkel a határokkal, és jelölje be a görbén β értékét sraffozással!

651 685 665 672 679 686 693 1700 707 714 721



Számitsa ki β konkrét értékét!

$\beta_{1680} = \Phi(\dots\dots) - \Phi(\dots\dots) =$

$$\frac{1714-1680}{7} = 4,8; \frac{1686-1680}{7} = 0,86$$

1-0,805 = 0,195	= .... = ...
jelentősen csökkent jelentősen nőtt	A mintaszám megduplázásával β értéke tehát ...., a próba erőssége ($e=1-\beta=1-0,5=0,5$-ről, az $n=25$ esethez képest) .... Esetünkben
1-0,195 = 0,805	e = ... = ...
50 80	Ez konkrétan azt jelenti, hogy mig a $\mu_t = 1680$ mkp tényleges esetben $n=25$ elemü minta csak az esetek..... %-ában, addig 50 elemü minta az esetek ....%-ában utasitja el a $\mu_h=1700$ mkp hamis hipotézist mutatja ki a ténylegesen fennálló eltérést.

2. Tömeggyártásban előállitott üveges paradicsomsüritmény névleges nettó sulya 530 dkg.
A sulytürés szabvány szerinti alsó határa 510 dkg. Az előállitott késztermék sulya - jó beállitás esetén - a névleges érték körül $\sigma = 10$ dkg paraméterü normális eloszlással ingadozik. A jelenlegi ellenőrzési terv szerint a sulyt negyedóránként ellenőrzik 1 db letöltött késztermék lemérésével. ($\alpha = 0,045$ szinten számoljunk!)

a) Mekkora a másodfaju hiba, ha a gyártás közben a töltési suly várható értéke $\mu_t = 520$ dkg-ra eltolódik?

b) Mennyivel csökken β értéke, ha az ellenőrzést 6 elemü minták átlagai alapján végzik?

(M: a) $\beta = 0,84$ b) $\beta = 0,31$, $\sigma_{\bar{x}} = 4$!)

6.2 Nemparaméteres próbák

Azokban az esetekben, ha az alapsokaság eloszlása nem ismert, vagy ha eleve tudjuk, hogy a minta nem származott valamilyen egzakt eloszlásból, végül ha nincs módunkban megvizsgálni az eloszlás jellegét, nemparaméteres próbához folyamodunk. A próba alkalmazásához elegendők a sorrendi, esetleg a névleges mérési szintről származó adatok. Az alkalmazás feltételei közé csupán a függetlenség és a valószinüségi változó folytonossága tartozik. A nemparaméteres próbák közül terjedelmi okok miatt a gyakorlat szempontjából legfontosabb, nagy minta elemszámra alkalmazható χ^2-próbát tárgyaljuk. Az elméleti jegyzetben tárgyalt Wilcoxon és Kolmogorov-Szmirnov próba alkalmazása az ott közölt feladatok kapcsán elsajátitható.

6.21 A χ^2 -próba

A χ^2-próba segitségével el tudjuk dönteni, hogy az eloszlásban megfigyelt tényleges gyakoriságok eltérnek-e szignifikánsan a hipotetikus, feltételezett gyakoriságoktól. A próba elvégzése céljából adatainkat táblázatos formában rendezzük. A táblázat elemi részeit celláknak nevezzük, amelyek bal felső sarkában az elméleti, jobb alsó sarkában a tényleges gyakoriságokat szokás feltüntetni.

A sor, illetve oszlop szerint összegzett gyakoriságokat marginális ($f_{i,\cdot}$ ill. $f_{\cdot,j}$) gyakoriságoknak nevezzük. Ha $F_{i,j}$-vel jelöljük a feltételezett, vagy elméleti gyakoriságokat és $f_{i,j}$-vel a tényleges gyakoriságokat, akkor a próbastatisztikát az alábbi képet szolgáltatja:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{i,j} - F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$$

ahol r : a sorok száma, s : az oszlopok száma. A fenti mennyiség a nullhipotézis fennállása esetén $(r - 1)(s - 1)$ szabadságfoku χ^2-eloszlást követ. A felirt táblázat állhat egy sorból, vagy oszlopból is! (A szabadsági fok ebben az esetben $r - 1$ vagy $s - 1$). A szabadsági fok és a szignifikancia szint ismeretében a többi próbához hasonlóan kereshetjük meg a IV. táblázatból a kritikus értékeket. A χ^2-próbát egyoldali próbaként szokás alkalmazni, ami azt jelenti, hogy az elméleti és a tényleges gyakoriságok tul szoros megegyezése esetén nem utasitjuk el a nullhipotézist. De kétségtelen tény, hogy a tul szoros megegyezés szintén ritkán előforduló esemény, ezért ezekben az esetekben célszerü a minta reprezentativitását biztositó feltételeket megvizsgálni. A soronkövetkező feladatokban mindig egyoldali próbát végzünk, s a továbbiakban erre külön nem hivjuk fel a figyelmet.

A χ^2-próba alkalmazásának előfeltételei:

$$N = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{i,j} \geq 50 \quad \text{és}$$

$$f_{i,.} = \sum_{j=1}^{s} f_{i,j} \geq 5, \qquad f_{.,j} = \sum_{i=1}^{r} f_{i,j} \geq 5 \quad \text{de lehetőleg}$$

$$f_{i,.} \geq 10 \qquad f_{.,j} \geq 10$$

A χ^2-próba alkalmazása illeszkedésvizsgálatra

Ha a nullhipotézis az eloszlásfüggvényt egyértelmüen meghatározza (igy annak paramétereit is!), akkor tiszta illeszkedésvizsgálatról beszélünk. Ez a gyakorlatban ritkán fordul elő. Ha az eloszlás paramétereit a mintából becsüljük, akkor becsléses illeszkedésvizsgálatról van szó. Ebben az esetben a χ^2-eloszlás szabadságfokainak számát ugy kapjuk, hogy a megállapitott szabadságfokok számát még a becsült paraméterek számával csökkentjük.

Diszkrét valószinüségi változó esetén az illeszkedésvizsgálat közvetlenül vagy csoportképzéssel elvégezhető. Folytonos valószinüségi változó esetén az 1. fejezetben megismert módszerek segitségével kell az adatokat osztályba sorolnunk a próba elvégzéséhez.

Mivel táblázatunk illeszkedésvizsgálat esetén csupán egy oszlopból áll, nem alkalmazzuk a cellás felirást, hanem külön oszlopban tüntetjük fel a tényleges, illetve az elméleti gyakoriságokat. A próbastatisztika is egyszerübben irható:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k},$$

$$DF = r - 1 - \ell$$

ahol ℓ: a becsült paraméterek száma.

FELADATOK

1. Azonos gyártási feltételek mellett előállitott szövetmintákon a hibák száma az ellenőrző vizsgálatok alapján az alábbiak szerint alakult:

Hibák száma (k)	0	1	2	3	4	5	6
Minták száma (f_k)	327	340	160	53	16	3	1

Állapitsuk meg, hogy a fenti tapasztalati eloszlás származhatott-e Poisson eloszlásból?

Megoldás

Mivel a nullhipotézis az eloszlásfüggvényt nem határozza meg egyértelmüen, ezért nem beszélhetünk .... illeszkedésvizsgálatról. Az eloszlás paramétereit a .... becsüljük, tehát .... illeszkedésvizsgálatról van szó.

tiszta

mintából
becsléses

A valószinüségi változó diszkrét, ezért az illeszkedésvizsgálat közvetlenül elvégezhető, az adatokat nem kell osztályba sorolnunk. A feltételezett Poisson eloszlás paraméterét tehát a .... kell becsülnünk, az eloszlás várható értékét a minta .... alapján becsüljük:

mintából

átlaga

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} f_k \cdot k}{\sum_{k=0}^{n} f_k}$$

$\bar{x} =$

$$= \frac{327.0+340.1+160.2+53.3+16.4+3.5+1.6}{327+340+160+53+16+3+1} =$$

$$= \frac{904}{900} \cong 1.$$

Tehát az eloszlás várható értéke:

$M(k) = \lambda =$ .... A becslés ....

$M(k) = \lambda = 1$ pontbecslés

Szakmai hipotézisünk és nullhipotézisünk a következőképpen alakul:

H_o: A táblázatban szereplő minták a ...... paraméterü .... eloszlásból származnak.

$\lambda = 1$, Poisson

Statisztikai próbának a ....próbát választjuk. Választott szignifikancia szintünk: $\alpha = 1\%$.

χ^2

χ^2_{sz} számitása:

A Matematikai Statisztika példatár I. kötet II. táblázatából kikeressük a $\lambda = 1$ paraméterü Poisson eloszlás $k =$ .... értékeihez tartozó valószinüségértékeket. A $k \geq 4$ értékeket összevonjuk egy osztályba, hogy kielégitsük az f_k .... feltételt.

$k = 0,1,\ldots 6$

$f_k \geq 10$

Adatainkat táblázatos formában rendezzük:

Hibák száma (k)	Tényleges gyakoriság (f_k)	Valószinüség (P(k))	Elméleti gyakoriság[x] (F_k)
0	327	0,3679	331
1	340	0,3679	331
2	160	0,1839	166
3	53	0,0613	55
4	20	0,0190	17
$\sum_{k=0}^{4}$	900	1,0000	900

[x] A táblázatban kerekitett értékek szerepelnek.

$$\chi^2_{sz} =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$$

A fentiek alapján felirhatjuk χ^2_{sz} értékét:

$$\chi^2_{sz} = \dots\dots\dots\dots$$

Behelyettesitve:

$$\chi^2_{sz} = \frac{(327-331)^2}{331} + \frac{(340-331)^2}{331} +$$

$$+ \frac{(160-166)^2}{166} + \frac{(53-55)^2}{55} +$$

$$+ \frac{(20-17)^2}{17} = \frac{16}{331} + \frac{81}{331} +$$

$$+ \frac{36}{166} + \frac{4}{55} + \frac{9}{17}$$

$$\chi^2_{sz} = 0,048 + 0,245 + 0,217 + 0,073 +$$

$$+ 0,529$$

$$\chi^2_{sz} = 1,112$$

A szabadsági fokok számának meghatározása:

χ^2 próba esetén a szabadsági fokok száma annyival csökken, ahány statisztikai jellemzőt számitunk a mintából az .... gyakoriságok meghatározására. Becsült paraméterek száma ℓ = ... Mivel táblázatunk csupán .... oszlopból áll, igy a cellák száma: r=5.

elméleti

$\ell = 1$

egy

A szabadsági fokok száma:

DF = ...

DF = r-1-ℓ

DF = 5-1-ℓ = 3

A DF = 3 szabadsági fokhoz α = = 0,01 szignifikancia szinthez tartozó χ^2_{krit} érték táblázatból:

$\chi^2_{0,01}$ = ...

$\chi^2_{0,01} = 18,3$

A kritikus és a számitott χ^2_{sz} érték összehasonlitásából látható, hogy χ^2_{sz} nem esik a .... tartományba.

kritikus

χ^2_{sz} ....

$\chi^2_{sz} \ll \chi^2_{krit}$

Ezért a nullhipotézist elfogadjuk. Tehát a minta a $\lambda = 1$ paraméterü .... eloszlásból származik!

Poisson

---

2. Vizsgáljuk meg a Sportfogadás cimü ujság XIX. évfolyam 46. számában megjelent "Melyik számot hányszor huzták ki a lottón?" cimü táblázat alapján, hogy ez ideig kihuzott nyerőszámok egyenletes eloszlást követnek-e?

Megoldás

Az eloszlás ismert, tehát tiszta illeszkedésvizsgálatról van szó. Mivel a valószinüségi változó ....az illeszkedésvizsgálat közvetlenül csoportositás nélkül elvégezhető. Másként megfogalmazva, azt kivánjuk vizsgálni, hogy a számok között levő eltérések valóban a .... tulajdonithatók-e, vagy egyes számoknak tényleg nagyobbak a kihuzási esélyei?

diszkrét

véletlennek

egyformán
egyenletes

$825 . 5 = 4125$

elméleti

$F_k = \frac{4125}{90}$

χ^2

$$\chi^2_{sz} = \sum_{i=1}^{90} \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$$

$$\frac{(38-45,83)^2}{45,83}$$

egy

Nullhipotézisünk:

Minden szám kihuzása .... valószinü, azaz a mintánk .... elméleti eloszlásból származik. A Sportfogadásban közölt táblázat 825 huzás eredményét tartalmazza. A 825 játékhéten összesen .... számot huztak ki.

Az egyenletes eloszlás feltételezése alapján számitott .... gyakoriságok mind a 90 számra egyaránt:

$F_k = \ldots\ldots\ldots = 45,83$

A nullhipotézis alapján számitott elméleti gyakoriságokat a mellékelt táblázatban tüntetjük fel. Statisztikai próbaként a .... próbát alkalmazzuk. Választott szignifikancia szintünk $\alpha = 1\%$

χ^2_{sz} számitása:

$\chi^2_{sz} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A táblázat értékeit behelyettesitve:

$$\chi^2_{sz} = \frac{(47-45,83)^2}{45,83} + \ldots\ldots + \frac{63-45,83}{45,83} + \ldots\ldots + \frac{(33-45,83)^2}{45,83} + \frac{(40-45,83)^2}{45,83} + \frac{(45-45,83)^2}{45,83} = 76,532$$

$\chi^2_{sz} = 76,532.$

A szabadsági fokok számának meghatározása:
Mivel táblázatunk csupán ....

oszlopból áll, igy a cellák száma: 90. A szabadsági fokok száma:

DF = ...

DF = 90 - 1 = 89

A DF = 89 szabadsági fokhoz $\alpha =$ $= 0,01$ szinten tartozó χ^2_{krit} érték táblázatból:

$\chi^2_{0,01}$ = ...

A kritikus és a számitott χ^2_{sz} érték összehasonlitásából látható, hogy χ^2_{sz} nem esik a .... tartományba.

χ^2_{sz} ....

Ezért a nullhipotézist elfogadjuk.

Tehát az ez ideig kihuzott lottószámok .... eloszlásából származnak, azaz egyetlen számnak sincs nagyobb esélye a kihuzásra.

DF = r - 1

$\chi^2_{0,01} = 124,1$

kritikus

$\chi^2_{sz} \ll \chi^2_{krit}$

egyenletes

Nyerő-szám :	Elméleti gyakoriságok F_k	Tényleges gyakoriságok f_k	$f_k - F_k$	$\frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$
1	2	3	4	5
1		47	1,17	0,029
2		38	2,17	0,102
3		63	7,17	1,121
4		41	4,83	0,508
5		39	6,83	1,017
6	45,83	48	2,17	0,102
7		48	2,17	0,102
8		39	6,83	1,017
9		41	4,83	0,508
10		48	2,17	0,102

1.	2.	3.	4.	5.
11	45,83	38	7,83	1,337
12		55	9,17	1,834
13		55	9,17	1,834
14		46	0,17	0,000
15		48	2,17	0,102
16		36	9,83	2,108
17		43	2,83	0,174
18		49	3,17	0,219
19		51	5,17	0,583
20		44	1,83	0,073
21	45,83	44	1,83	0,073
22		46	0,17	0,000
23		56	10,17	2,256
24		54	8,17	1,456
25		47	1,17	0,029
26		44	1,83	0,073
27		35	10,83	2,559
28		45	0,83	0,015
29		50	4,17	0,379
30		32	13,83	4,173
31	45,83	37	1,17	0,029
32		39	3,17	0,219
33		52	6,17	0,830
34		56	10,17	2,256
35		43	2,83	0,174
36		48	2,17	0,102
37		49	3,17	0,217
38		51	5,17	0,583
39		39	6,83	1,017
40		40	5,83	0,741
41	45,83	43	2,83	0,174
42		51	5,17	0,583
43		39	6,83	1,017
44		46	0,17	0,000
45		43	2,83	0,174
46		48	2,17	0,102
47		55	9,17	1,834
48		39	6,83	1,017
49		59	13,17	3,784
50		43	2,83	0,174

1.	2.	3.	4.	5.
51		59	13,17	3,784
52		34	11,83	3,053
53		52	6,17	0,830
54		40	5,83	0,741
55	45,83	42	3,83	0,320
56		52	6,17	0,830
57		40	5,83	0,741
58		36	9,83	2,108
59		39	6,83	1,017
60		45	0,83	0,015
61		42	3,83	0,320
62		38	2,17	0,102
63		37	1,17	0,029
64		50	4,17	0,379
65	45,83	53	7,17	1,121
66		46	0,17	0,000
67		54	8,17	1,456
68		40	5,83	0,741
69		57	11,17	2,722
70		49	3,17	0,217
71		52	6,17	0,830
72		52	3,83	0,320
73		54	8,17	1,456
74		49	3,17	0,217
75	45,83	56	10,17	2,256
76		48	2,17	0,102
77		54	8,17	1,456
78		45	0,83	0,015
79		42	3,83	0,320
80		41	4,83	0,508
81		42	3,83	0,320
82		50	4,17	0,379
83		43	2,83	0,174
84		49	3,17	0,217
85	45,83	42	3,83	0,320
86		59	13,17	3,784
87		44	1,83	0,073
88		33	12,83	3,591
89		40	5,83	0,741
90		45	0,83	0,015

$$76,532 = \chi^2_{sz}$$

paramétereit

5,2 g

3. A Sportlabada KTSz 9000 db gumibelsőt készitett export megrendelésre. A folyó gyártásból 150 elemü mintát vettek, s arra a kérdésre keresnek választ, hogy a minta normális alapeloszlásból származott-e? A minta adatait leiró statisztikai módszerekkel feldolgoztuk. Az igy kapott adatok a következők:

Osztályhatárok (gramm)	Gyakoriság (f_k)
101,5 - 104,5	1
104,5 - 107,5	4
107,5 - 110,5	11
110,5 - 113,5	18
113,5 - 116,5	28
116,5 - 119,5	45
119,5 - 122,5	22
122,5 - 125,5	11
125,5 - 128,5	7
128,5 - 131,5	3
$\sum_{k=1}^{r}$	150

Vizsgáljuk meg, hogy a minta milyen eloszlásból származott!

Megoldás

A minta átlagát és szórását kiszámitottuk, ennek segitségével becsüljük az eloszlás ....

$\bar{x}$ = 117,2 g s = 5,2 g

Igy a feltételezett normális eloszlás paraméterei:

μ = 117,2 g

σ = ...

A nullhipotézis:

H_0: A gumibelső sulya $\mu = 117,2$ g várható értékü $\sigma = 5,2$ g szórásu .... eloszlást követ. normális

A szignifikancia szintet $\alpha = 1\%$-nak választjuk.

Határozzuk meg a felirt osztályközök alapján az elméleti gyakoriságokat:

Osztályhatárok (g)	Tényleges gyakoriság (f_k)	Valószinüség ($P(x_1 \leq x \leq x_2)$)	Elméleti gyakoriság (F_k)
101,5 - 104,5	1	0,0073	1,095
104,5 - 107,5	4	0,0241	3,615
107,5 - 110,5	11	0,0689	10,335
110,5 - 113,5	18	0,1386	20,790
113,5 - 116,5	28	0,2094	31,410
116,5 - 119,5	45	0,2217	33,255
119,5 - 122,5	22	0,1738	26,070
122,5 - 125,5	11	0,1003	25,045
125,5 - 128,5	7	0,0499	6,135
128,5 - 131,5	3	0,0150	2,250
$\sum_{k=1}^{r}$	150	1,0000	150,000

Hogy kielégithessük az f_k .... ≥ 10

feltételt, az első .... és az három

utolsó .... osztályközt két

összevonjuk. A táblázatban a χ^2 mennyiségeket is feltüntettük.

Osztályhatárok (g)	Tényleges gyakoriság (f_k)	Elméleti gyakoriság (F_k)	$\frac{(f_k-F_k)^2}{F_k}$
101,5 - 110,5	16	15,0	0,06
110,5 - 113,5	18	20,8	0,37
113,5 - 116,5	28	31,4	0,37
116,5 - 119,5	45	33,3	4,15
119,5 - 122,5	22	26,1	0,64
122,5 - 125,5	11	15,0	1,09
125,5 - 131,5	10	8,4	0,30
$\sum_{k=1}^{7}$	150	150,0	6,98

6,98

7 - 1 - 2

$<$

elfogadjuk

normális

$$\chi^2_{sz} = \sum_{k=1}^{7} \frac{(f_k-F_k)^2}{F_k} = \ldots\ldots\ldots$$

$DF = r - 1 - \ell = \ldots\ldots\ldots = 4$

$\alpha = 0{,}01$

$\chi^2_{krit} = 13{,}3$

$\chi^2_{sz} \ldots\ldots\ldots \chi^2_{krit}$

A nullhipotézist tehát ...., azaz a minta a $\mu = 117{,}2$ g várható értékü és $\sigma = 5{,}2$ g szórásu .... eloszlásból származik.

A χ^2-próba alkalmazása homogenitás vizsgálatra

Homogenitásvizsgálat segitségével eldönthetjük, hogy két valószinüségi változó azonos eloszlásunak tekinthető-e, pontosabban, hogy két minta azonos alapsokaságból származik-e. A közösnek feltételezett eloszlásfüggvény a próbában nem szerepel, s annak jellegére vonatkozóan semmilyen kikötésünk nincs.

Diszkrét valószínüségi változó esetén a próba közvetlenül vagy csoportképzéssel elvégezhető, mig folytonos valószínüségi változó esetén az adatokat osztályokba kell sorolnunk.

A próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{i,j}-F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$$

mivel s = 2 minden esetben

$$DF = r - 1$$

ahol:

$$F_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_{i,j} \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}}{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}} = \frac{f_{.,j} \cdot f_{i,.}}{N}$$

FELADATOK

1. Golyóscsapágy minősitése az ISO által kidolgozott rendszer szerint a következő:

PO : normál pontosságu csapágyak
P6 : nagy pontosságu csapágyak
P5 : fokozott pontosságu csapágyak
P4 : fokozott nagy pontosságu csapágyak.

A fenti osztályokba több jellemző értékelése alapján sorolják az egyes csapágyakat.
Azt kivánjuk vizsgálni, hogy a különböző palástátmérőjü csapágyak hasonlóak-e a minőségi besorolás megoszlása szerint. 400 elemü minta adatai alapján vizsgáljuk meg, hogy PO és P6 minőségi osztály szerinti megoszlás azonos-e a különböző palástátmérőjü csapágyak között:

Palástátmérő (mm)	PO	P6	Összesen:
10,1-18	71	89	160
18,1-30	36	24	60
30,1-50	99	61	160
50,1-80	8	12	20
Összesen:	214	186	400

Megoldás

Szakmai hipotézisünk, hogy a PO és P6 minőségi osztály homogén eloszlásu, a palástmérő függvényében. Nullhipotézisünket a szakmaival azonosan fogalmazzuk meg.

$P(PO_i) = P(P6_i)$

H_o: ....

Szignifikancia szintként $\alpha = 1\%$-t választunk.
Határozzuk meg az elméleti gyakoriság értékeit.

Táblázatba foglalva (a bal felső sarokban az elméleti, a jobb alsó sarokban a tapasztalati gyakoriságokat tüntettük fel):

Palástátmérő (mm)	PO	P6	Összesen:
10,1-18	85,6 / 71	74,4 / 89	160 / 160
18,1-30	32,2 / 36	27,9 / 24	60 / 60
30,1-50	85,6 / 99	74,4 / 61	160 / 160
50,1-80	10,7 / 8	9,3 / 12	20 / 20
Összesen:	214 / 214	186 / 186	400 / 400

Számitsuk ki χ^2 értékét:

$$\chi^2_{sz} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} = \frac{(f_{i,j} - F_{i,j})^2}{F_{i,j}} =$$

$$= \frac{(71-85,6)^2}{85,6} +$$

$$+ \frac{(89-74,4)^2}{74,4} + \ldots + \frac{(8-10,7)^2}{10,7} +$$

$$+ \frac{(12-9,3)^2}{9,3} + \ldots + \frac{(8-10,7)^2}{10,7} +$$

$$+ \frac{(12-9,3)^2}{9,3} = 12,32$$

DF = r - 1 = ... = 3 4 - 1

$\alpha = 0,01$

11,3

<

elutasitjuk

homogénnek.

azonos

χ^2_{krit} = ...

χ^2_{krit} .... χ^2_{sz}

A nullhipotézist ....

A PO és P6 minőség megoszlása különböző átmérőcsoportok esetén nem tekinthető ....

2. Egy mosóport töltő automata müködését ellenőrizve három egxmást követő időpontban 50-50 elemü véletlen mintát vettünk a töltőgépről lekerülő mosópordobozok közül. Az elemeket egyenként lemértük, majd osztályközökbe soroltuk ugy, hogy kielégitsük a marginális értékekre vonatkozó elemszám kikötéseket. Adatainkat a következő táblázat tartalmazza:

Osztályhatárok	1. minta	2. minta	3. minta
184,5-193,5	3	15	0
193,4-202,5	17	30	2
202,5-211,5	25	5	20
211,5-220,5	5	0	19
220,5-229,5	0	0	9
$\sum_{i=1}^{r}$	50	50	50

Vizsgáljuk meg, hogy az egyes minták azonos alapsokaságból származtak-e?

Megoldás

Felállitjuk a nullhipotézist, amely szerint mintáink .... alapsokaságból származnak.

Ha A_i jelöli azt az eseményt, hogy

az egyik mintából származó érték egy meghatározott intervallumba, azaz .... esik és B_i jelenti ugyanazt a másik mintára, akkor nullhipotézisünket matematikai formában fogalmazva:

osztályba

H_0: ....

$P(A_i) = P(B_i)$

Hipotézisünket az összes lehetséges, azaz .... esetben megvizsgáljuk.

három

Szignifikancia szintként $\alpha = 1\%$-ot választunk. Vizsgáljuk meg először az 1. és 2. minta homogenitását. Adatainkat a következő táblázatban tüntetjük fel, majd meghatározzuk a marginális és az elméleti gyakoriságokat.

A tapasztalati gyakoriságokat a .... az elméleti gyakoriságokat pedig a .... sarokba irjuk.

jobb alsó,
bal felső

Osztály-határok	1. minta	2. minta	Összesen
184,5-193,5	... 3	... 15	18 18
193,5-202,5	... 12	... 30	47 47
202,5-211,5	... 25	... 5	30 30
211,5-220,5	2,5 5	2,5 0	5 5
220,5-229,5	0 0	0 0	0 0
Összesen:	50 50	50 50	100 100

1. minta	2. minta
9,0 3	9,0 15
23,5 17	23,5 30
15,0 25	15,0 5

$\frac{f_{.,j} \cdot f_{i,.}}{N}$

i

j

összeszoroztuk

osztottuk

χ^2

5, 2

$\frac{(15-9)^2}{9}$

$\frac{(0-2,5)^2}{2,5}$

Az elméleti gyakoriságot az

$$F_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_{i,j} \cdot \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}}{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}} = \dots\dots\dots\dots$$

összefüggés segitségével számitottuk ki. Tudjuk, hogy a sorindex jelölése ..... és az oszlop index jelölése .....

Az elméleti gyakoriságot tehát ugy kaptuk meg, hogy a megfelelő sor és oszlop szerinti marginális értéket .... és .... az összes elemek számával.

Ezután minden egyes cellára összegezzük a .... mennyiségeket.

$$\chi^2_{sz} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{i,j} - F_{i,j})^2}{F_{i,j}}.$$

Esetünkben r = ... és s = ...

$$\chi^2_{sz} = \frac{(3-9)^2}{9} + \dots + \frac{(17-23,5)^2}{23,5} + \dots +$$

$$+ \frac{(5-15)^2}{15} + \frac{(5-2,5)^2}{2,5} + \dots\dots\dots =$$

$$= 29,9$$

A két minta azonos elemszáma miatt jelen esetben a számitás egyszerübben is elvégezhető. Az egyes elméleti gyakoriságok a két oszlopban páronként megegyeznek, mert a két minta elemszáma azonos. Ha ezt

F_i-vel és valamelyik oszlop tényleges gyakoriságát f_i-vel jelöljük a χ^2 mennyiséget a következőképpen számolhatjuk:

$$\chi^2_{sz} = 2 \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} = 29,9$$

A szabadsági fok:

DF = ... r-1 = 4

$\alpha = 0,01$

χ^2_{krit} = ... 13,3

χ^2_{krit} .... χ^2_{sz} $\ll$

A nullhipotézist ...., az 1. és 2. minta ....származik azonos alapsokaságból.

elutasitjuk
nem

Folytassuk vizsgálatunkat az 1. és 3. minta összehasonlításával.

Osztályhatárok	1. minta	2. minta	Összesen:
184,5-193,5	1,5 3	1,5 0	3 3
193,5-202,5	9,5 17	... 2	19 19
202,5-211,5	22,5 25	22,5 20	45 45
211,5-220,5	... 5	... 19	24 24
220,5-229,5	... 0	4,5 9	9 9
Összesen:	50 50	50 50	100 100

9,5

12, 12

4,5

Az egyszerűbb számitási eljárást választva:

$\frac{(17-9,5)^2}{9,5}$

$\frac{(5-12)^2}{12}$

5-1 = 4

13,3

$\ll$

sem

12,5 12,5

9,5 9,5

$$\chi^2_{sz} = 2\sum_{i=1}^{5}\frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} = 2\left[\frac{(3-1,5)^2}{1,5} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{(25-22,5)^2}{22,5} + \dots + \frac{(0-4,5)^2}{4,5}\right]$$

$\chi^2_{sz} = 32,56$

DF = r-1 = ...

$\alpha = 0,01$

χ^2_{krit} = ...

α és DF nem változott, ezért χ^2_{krit} értéke természetesen ugyanaz mint 1. és 2. minta összehasonlitása esetén volt.

χ^2_{krit} .... χ^2_{sz}

Nullhipotézisünket elutasitjuk az 1. és 3. minta .... származik azonos alapsokaságból.

Végül vizsgáljuk meg a 2. és 3. minta homogenitását.

Osztályhatárok	2. minta	3. minta	Összesen
184,5-193,5	7,5 / 15	7,5 / 0	15 / 15
193,5-202,5	16,0 / 30	16,0 / 2	32 / 32
202,5-211,5	... / 5	... / 20	25 / 25
211,5-220,5	... / 0	... / 19	19 / 19
220,5-229,5	4,5 / 0	4,5 / 9	9 / 9
Összesen:	50 / 50	50 / 50	100 / 100

$\chi^2_{sz} = 2\left[\frac{(15-7,5)^2}{7,5}+\ldots+\frac{(5-12,5)^2}{12,5}+\right.$	$\frac{(30-16)^2}{16}$
$\left.+\ldots\ldots+\frac{(0-4,5)^2}{4,5}\right] = 76,5$	$\frac{(0-9,5)^2}{9,5}$
$\chi^2_{krit} = 13,3$	
$\chi^2_{krit} \ldots\ldots\ \chi^2_{sz}$	$\ll$
A nullhipotézist .... a 2. és 3. minta .... származik azonos alapsokaságból.	elutasitjuk sem
Szakmai következtetésünk: az adagoló automata beállitása a mintavételek idején .... azonos.	nem volt
Amennyiben az eltérés szakmai szempontból lényeges (pl. tullépi a szabvány által megengedett határt) a gép beállitását stabilizálni kell.	

χ^2-próba alkalmazása függetlenségvizsgálatra

Az a kérdés, hogy két valószinüségi változó független-e egymástól vagy sem, kontingencia táblázat segitségével és χ^2-próba alkalmazásával dönthető el.

Az egyes cellák elméleti gyakoriságait a marginális értékek felhasználásával becsüljük.

$$F_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_{i,j} \cdot \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}}{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{i,j}} = \frac{f_{\cdot,j} \cdot f_{i,\cdot}}{N}$$

A próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(f_{i,j} - F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$$

$$DF = (r - 1)(s - 1)$$

FELADATOK

1. Egy textilipari vállalat bizonyos mennyiségü szövet elkészitésére fogadott el megrendelést. A vevő legszigorubb követelménye a m^2-sulyra vonatkozott. Vizsgáljuk meg, hogy van-e összefüggés a különböző koncentrációju impregnáló fürdők alkalmazása, és a m^2 suly között! Háromféle koncentrációju, fürdő (I., II., III.) alkalmazásával összesen 220 elemü mintát vizsgálunk. A rendezett adatok a következők:

Fürdő / m^2 suly	I.	II.	III.	Összesen
166,1-170	50	4	1	55
170,1-174	44	41	33	118
174,1-178	6	15	26	47
Összesen	100	60	60	220

Megoldás

A feladatot χ^2-próba segitségével végezhető függetlenségvizsgálat alkalmazásával oldjuk meg.

Szakmai hipotézisünk, hogy a különböző fürdőkoncentrációk különböző .... eredményeznek. Nullhipotézisünk a szakmai hipotézis .... fogalmazható meg, azaz a m^2 suly és a fürdőkoncentráció .... egymástól.

Ha A_i-vel jelöljük azt az eseményt, hogy a m^2 suly bizonyos ...., valamint

m^2-sulyokat

ellentettjeként

független

osztályközbe esik

események

$P(A_i . B_j) = P(A_i) . P(B_j)$

B_i-vel az egyes fürdőtipusok, mint .... bekövetkezését, akkor a nullhipotézis röviden a következőképpen fogalmazható meg:

H_o: ....

A szignifikancia szintet $\alpha = 1\%$-nak választjuk. A kontingencia táblázat a következő:

25,00
15,00

Fürdő / m^2 suly	I.	II.	III.	Összesen:
166,1-170	 50	 4	15,00 1	55 55
170,1-174	53,64 44	32,18 41	32,18 33	118 118
174,1-178	21,36 6	12,82 15	12,82 26	47 47
Összesen:	100 100	60 60	60 60	220 220

elméleti gyakorisági

gyakoriságot

minta
elemszámával

A kontigencia táblázat egyes celláinak bal felső sarkában a megfelelő .... értékek szerepelnek. A jobb alsó sarokban a tapasztalati .... tüntettük fel.
Az elméleti gyakorisági értékeket megkapjuk, ha a marginális értékek szorzatát osztjuk a ...., pl. 1,1 cella elméleti gyakoriságértéke

$$F_{1,1} = \frac{100.55}{220} = 25$$

gyakoriságokkal
valószinüség

szorzási , szabály

Ekkor nem teszünk mást, mint az egyes relativ .... becsült .... értékeket, a független valószinüségekre vonatkozó .... alapján, összeszorozzuk.

Ez teljes mértékben megegyezik a .... megfogalmazott állitással.

nullhipotézisben

χ^2_{sz} meghatározása ugy történik, hogy a táblázatban .... összegezzük a .... értékeket:

cellánként
χ^2

Képlettel felirva:

$$\chi^2_{sz} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{(f_{i,j} - F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$$

$$\chi^2_{sz} = \frac{(50-25)^2}{25} + \frac{(4-15)^2}{15} + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{(15-12,82)^2}{12,82} + \frac{(26-12,82)^2}{12,82} =$$

$$= 75,26$$

Meghatározzuk a szabadsági fokot:

DF = ...

$(r-1) \cdot (s-1)$

ahol: r : a .... száma

s : a .... száma

sorok

oszlopok

tehát:

DF = ... = 4

$(3-1) \cdot (3-1) =$

$\alpha = 0,01$

χ^2_{krit} = ...

13,3

A χ^2_{krit} és χ^2_{sz} értékeit összehasonlitva láthatjuk, hogy

$\chi^2_{krit} \ll \chi^2_{sz}$, ezért nullhipotézisünket ....

elutasitjuk.

fogadjuk el

összefüggés

I. fürdő

nincs lényeges

független
egymástól

$P(A_i.B_j) = P(A_i).P(B_j)$

I. fürdő

marginális
10-nél
két sor

kontigencia
elméleti
gyakorisági

Igy szakmai hipotézisünket .... azaz, hogy a m^2 suly és fürdőkoncentráció között .... van.

A mért adatok áttekintése azt a feltevést sugallja, hogy a négyzetméter-suly változás főként az .... eredményeként jön létre, s a II. ill. III. fürdő között .... eltérés. Erre vonatkozó nullhipotézisünk az előzőekhez hasonlóan fogalmazható meg, vagyis a négyzetméter-suly és fürdőkoncentráció ....

H_o: ....

A szignifikancia szintet most is $\alpha = 0,01$-nek választjuk. A nullhipotézis megvizsgálása céljából hagyjuk el az .... kapcsán mért adatokat.

Ahhoz, hogy a .... gyakoriságok nagyobbak legyenek ......-nél össze kell vonni az első .... adatait.

Igy a következő táblázatot kapjuk:

Fürdő / m^2 suly	II.	III.	Összesen:
166,1-174	45	34	79
174,1-178	15	26	41
Összesen:	60	60	120

2x2-es .... táblázat esetén nem szükséges az egyes .... értékeket kiszámitani, mivel a χ^2 mennyiség meghatározására egyszerübb módszer is van.

χ^2_{sz} meghatározása:

$\chi^2_{sz} =$

$$= \frac{(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21})^2}{(f_{11}+f_{12})(f_{21}+f_{22})(f_{11}+f_{21})(f_{12}+f_{22})} \cdot n$$

$\chi^2_{sz} =$ .... $= 4,54$

$$\frac{(45.26-34.15)^2}{79.41.60.60} \cdot 120 =$$

Szabadsági fok meghatározása az előbbiek szerint:

DF = ... = 1

(r-1) . (s-1)

$\alpha = 0,01$-hez tartozó χ^2_{krit} =.......

6,63

A számitott és kritikus χ^2 érték .... láthatjuk, hogy .... nem esik a kritikus tartományba:

összehasonlitásából

χ^2_{sz}

$$\chi^2_{sz} < \chi^2_{krit}$$

Ezek alapján a nullhipotézist......., tehát a II., ill. III. fürdő között .... különbség. A m^2-suly változásra az I. fürdőnek a II., III. fürdőhöz viszonyitva tehát eltérő hatása mutatkozott meg.

elfogadjuk

nincs lényeges

2. Egy textilgyár laboratóriumában uj mügyantával impregnált szövet előállitásával kisérleteznek. E célból négyféle impregnáló fürdőt kevernek, és fürdőnként 500-500 méter kisérleti gyártásu szövetet impregnálnak. Reprezentativ mintavétellel 182 elemü mintát vesznek, amelyet gyürhetetlen-

ség szempontjából vizsgálnak. Ezt a másként, gyűrődést feloldó képességnek nevezett mennyiséget gyűrődési fokban mérik. Vizsgáljuk meg, van-e összefüggés az egyes impregnáló fürdők és a gyűrődés feloldó képesség között?

A rendezett adatok az alábbiak:

Fürdő / Gyűrődési fok	I.	II.	III.	IV.	Összesen
120,1 - 130	20	17	11	5	53
130,1 - 140	14	16	12	6	48
140,1 - 150	12	14	20	35	81

Megoldás

A feladatban feltett kérdést .... segitségével és .... próba alkalmazásával döntjük el.

kontingencia táblázat χ^2

Szakmai hipotézisünk szerint az egyes gyűrődési fok értékek .... az alkalmazott fürdőtől.

függenek

Nullhipotézisként a szakmai hipotézis .... fogalmazhatjuk meg, vagyis a két változó .... egymástól.

ellentettjét független

H_o: ....

$P(A_i . B_j) = P(A_i) . P(B_j)$

ahol A_i jelenti azt az eseményt, hogy a gyűrődési fok egy adott .... esik, és B_j jelenti azt, hogy a fürdőtipusok, mint események ....

osztályközbe

bekövetkeztek.

A szignifikancia szintet $\alpha = 1\%$-nak választjuk.

Első lépésként elkészitjük a .... táblázatot:

kontingencia

Gyürődési fok \ Fürdő	I.	II.	III.	IV.	Összesen
120,1 - 130	13,40 20	13,68 17	12,52 11	13,40 5	53 53
130,1 - 140	12,13 14	12,40 16	11,34 12	12,13 6	48 48
140,1 - 150	20,47 12	20,92 14	19,14 20	20,47 35	81 81
Összesen:	46 46	47 47	43 43	46 46	182 182

A kontingencia táblázat egyes .... bal felső sarkában a megfelelő .... gyakorisági értékek szerepelnek. A .... sarokba a .... gyakoriságot irjuk fel.

celláinak
elméleti
jobb alsó
tapasztalati

Az elméleti gyakoriság értékeket a tapasztalati gyakoriság értékekből becsültük a függetlenség fennállásának feltételezésével.

Ezután .... segitségével döntjük el, hogy nullhipotézisünk igaz vagy sem.

χ^2-próba

Irjuk fel χ^2_{sz} mennyiséget ugy, hogy a táblázatban .... összegezzük a χ^2 értékeket.

cellánként

$$\chi^2_{sz} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\frac{(f_{i,j}-F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$$

$$\chi^2_{sz} = \frac{(20-13,40)^2}{13,40} + \frac{(17-13,68)^2}{13,68} + \dots +$$

(r-1) (s-1)

sorok

oszlopok

16,8

$\chi^2_{krit} \ll \chi^2_{sz}$

elutasitjuk
elfogadjuk
függ

IV.

elhagyjuk.

független

$P(A_i . B_j) = P(A_i) . P(B_j)$

$\alpha = 1\%$

$$+\frac{(20-19,14)^2}{19,14}+\frac{(35-20,47)^2}{20,47} = 30,6$$

A szabadsági fok:

DF = ... = (3-1) (4-1) = 6

ahol: r : a .... száma

s : az .... száma

DF = 6 és α= 0,01 tartozó

χ^2_{krit} = ...

tehát a számitott és kritikus χ^2 értékeket összehasonlitva láthatjuk, hogy

....

A nullhipotézist ...., a szakmai hipotézist .... azaz a gyürődés feloldó képesség .... az egyes fürdők alkalmazásától.

Mivel az adatok figyelmes áttekintése után az a benyomásunk, hogy a gyürődésfeloldó képesség változás főleg a ......: fürdő miatt jön létre, vizsgáljuk megváltozik-e eredményünk, ha a vizsgálatból a IV. fürdőt ....

Nullhipotézisünk az előzőkhöz hasonlóan az, hogy a gyürődési fok .... a koncentrációtól.

H_o: ....

A szignifikancia szintet ismét ....-nak választjuk.

Az uj kontingencia táblázat a következőképpen alakul:

Gyürődési fok \ Fürdő	I.	II.	III.	Összesen
120,1 - 130	16,23 20	16,60 17	15,17 11	48 48
130,1 - 140	14,20 14	14,52 16	13,28 12	42 42
140,1 - 150	15,57 12	15,58 14	14,55 20	46 46
Összesen:	46 46	47 47	43 43	136 136

χ^2_{sz} = ... $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{(f_{i,j}-F_{i,j})^2}{F_{i,j}}$

$$\chi^2_{sz} = \frac{(20-16,23)^2}{16,23} + \frac{(17-16,50)^2}{16,50} + \ldots +$$

$$+ \frac{(14-15,88)^2}{15,88} + \frac{(20-14,55)^2}{14,55} = 5,387$$

DF = (r-1) (s-1) = ... = 4 (3-1) (3-1)

χ^2_{krit} = ... 13,3

Mivel χ^2_{sz} .... χ^2_{krit} a null- <

hipotézist elfogadjuk, vagyis I., II., III. fürdők alkalmazásától .... tekinthető a gyürődés feloldó képessége. függetlennek

Igy a IV. fürdő hatása okozta az előző vizsgálatban a két valószinüségi változó függetlenségére vonatkozó hipotézisünknek az .... elvetését.

Szakmai szempontból a jelenlegi adatok alapján azt tudjuk javasolni, hogy a IV. fürdő .... alkalmazása célszerü mivel az eredményezi - a .... minta adatai figyelembevételével - a legkedvezőbb gyürhetetlenséget.

GYAKOROLÓ FELADATOK

1. Vizsgálja meg, hogy az 1. fejezet 1.1 feladatában szereplő müanyagrudacskák átmérője milyen eloszlást követ? ($\alpha = 0,05$; normális.)

2. Milyen eloszlásból származott az 1.2 feladatban szereplő felületi hiba? ($\alpha = 0,05$; Poisson.)

3. Milyen eloszlást mutat az 1.5 feladatban megfogalmazott minőségi jellemző? ($\alpha = 0,05$; normális.)

4. Milyen eloszlást követ az 1.6 feladatban jellemzett Polipack tej térfogata? ($\alpha = 0,05$; normális)

5. Vizsgálja meg, hogy az 1.1 feladatban szereplő a, b, c, d, e minták páronként homogénnak tekinthetők-e? (Bizonyos mértékig függ az osztályösszevonásoktól, de $\alpha = 0,05$ szinten páronként homogénnek tekinthetők.)

6. Végezze el a függetlenségvizsgálatot az a, b, c, d, e minták között! ($\alpha = 0,05$; független.)

7. RANG MÓDSZEREK

Az ebben a fejezetben tárgyalt matematikai statisztikai módszerek az un. sorrendi mérés szintjéről származó adatok feldolgozására és elemzésére használatosak. Az adatok általában egy vagy több rangsor formájában adottak. Ezen módszereket használhatjuk akkor, ha valamilyen okból nem áll módunkban pontosabban mérni valamilyen változókat, vagy akkor is, ha a pontosan mért adatokat gyors statisztikai elemzés alá akarjuk vetni. Az utóbbi esetben a pontosabban mért (intervallum, vagy arányos mérési szint) adatokat rangsorokká alakitjuk át, és igy dolgozzuk fel azokat. A rang módszerek segitségével általában két vagy több rangsor közötti korreláció mértékét vizsgáljuk. A fejezetben szerepel még páronkénti összehasonlitásból származó adatok feldolgozására szolgáló módszer is.

Két rangsor összehasonlitására alkalmas a Spearman-féle rangkorrelációs együttható (R).

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)} \qquad -1 \leq R \leq 1$$

ahol:

n : az összehasonlitott rangok száma

d_i : a páronkénti rangszámkülönbség.

Több rangsor összehasonlitására szolgál a Kendall-féle rangkorrelációs (konkordancia) együttható (W).

$$W = \frac{S}{S_{max} - K} \quad \frac{S}{\frac{1}{12} m^2(n^3 - n) - m \sum_{j=1}^{m} T_j} \qquad 0 \leq W \leq 1$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2$$

$$\bar{R} = \frac{m(n+1)}{2} \qquad T_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{p} (t^3 - t)_k$$

ahol:

m : a rangsorolók (oszlopok) száma

n : a rangsoroltak (sorok) száma

R_i : a soronkénti rangösszeg

t : a kötéscsoportban előforduló azonos rangszámok száma

p : a kötéscsoportok száma egy rangsoron belül.

Ha rangszámegyezés, vagy kötés nincs k értéke 0.

A páronkénti összehasonlítással nyert adatokból a következő egyetértési együttható számolható (A).

$$A = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (C_k^2)_{i,j}}{C_m^2 \cdot C_n^2} - 1$$

ahol:

m : a bírálók száma

n : a páronként összehasonlított dolgok vagy személyek száma

C_m^2, C_n^2 : m, n elem másodosztályú ismétlés nélküli kombinációja

k : az egyetértő bírálók száma az adott összehasonlítás esetén.

A felsorolt együtthatók szignifikancia vizsgálata a feladatokban tárgyalt módon elvégezhető.

FELADATOK

1. A vásárlók fóruma szeretné megállapitani, hogy a kereskedelemben kapható nyolc különböző rádiókészülék közül melyek elégitik ki leginkább a vásárlók igényeit. E célból egy szakértői bizottság kilenc, a fogyasztó szempontjából lényeges jellemző szerint rangsorolja a fenti készülékeket. A kapott rangszámokat a következő táblázat tartalmazza:

jellemző / tipus	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
A	3	5	6	5	5	6	7	6	7
B	5	3	7	3	6	2	5	2	2
C	8	8	4	6	1	5	8	4	3
D	2	2	2	1	2	1	1	5	5
E	4	1	5	8	8	4	4	8	4
F	1	6	3	2	4	7	2	3	6
G	6	7	8	4	7	8	6	7	8
H	7	4	1	7	3	3	3	1	1

Hogyan lehetne egyesitett rangsort késziteni, amely minden jellemzőt egybefoglalva egy általános minősitést tükröz?

Megoldás

Először meg kell vizsgálni, hogy az egyes rangsorok csupán .... ingadozást mutatnak, vagy .... összhang van a különböző szempontok szerint végzett rangsorolások között. Ha kimutatható ilyen .... akkor a rangszámok .... alapján készithetünk olyan eredő rangsort, amely általános minősitést fog tükrözni.

véletlenszerü
szignifikáns

összhang
összegezése

Az összhang vizsgálatára szolgál a ....-féle egyetértési (konkordancia), együttható. W értékét ugy számithatjuk, hogy a rangszámösszegek tényleges négyzetes eltéréseit .... a lehetséges .... négyzetes eltérések összegével. Ez a hányados jellemző lesz az ...., vagy összhang mértékére. W szignifikancia vizsgálata a VII. táblázat alapján végezhető el. Értéke a [0,1] zárt intervallumban helyezkedik el.

$W = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 0 \leq W \leq 1$

$S_{max} = \ldots\ldots\ldots$

Ezt behelyettesitve kapjuk:

$$W = \frac{S}{S_{max}} = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2 (n^3 - n)}$$

Ahol m : a rangsorolók száma.

Példánkban

m = 9.

n : a .... dolgok száma.
Példánkban n = 8.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2$$

Ahol $\bar{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

és $R_i = \sum_{j=1}^{m} R_{i,j}$ azaz a.......... rangösszeg. A fentiek alapján számitsuk ki W értékét:

$$\bar{R} = \frac{m(n+1)}{2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{81}{2} = 40,5$$

Kendall

osztjuk
maximális

egyetértés

$$W = \frac{S}{S_{max} - K}, \quad K = 0$$

$$S_{max} = \frac{1}{12} m^2 (n^3 - n)$$

rangsorolt

$= \frac{m(n+1)}{2}$

soronkénti

$\frac{9(8+1)}{2}$

$$S_{max} = \frac{1}{12} m^2(n^3 - n)$$

$$S_{max} = \frac{81.504}{12} = \frac{40824}{12} = 3402$$

S értékének számitására szükségünk van a soronkénti rangösszegekre, azaz

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \ ....$$

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} R_{i,j}$$

Ezt a következő táblázat tartalmazza:

jellemző / tipus	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	R_i
A	3	5	6	5	5	5	6	7	7	50
B	5	3	7	3	6	2	5	2	2	35
C	8	8	4	6	1	5	8	4	3	47
D	2	2	2	1	2	1	1	5	5	21
E	4	1	5	8	8	4	4	8	4	46
F	1	6	3	2	4	7	2	3	6	34
G	6	7	8	4	7	6	6	7	8	61
H	7	4	1	7	3	3	3	1	1	30

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2 = ...$$

$$\sum_{i=1}^{8} (R_i - 40,5)^2$$

$$S = (50-40,5)^2 + (35-40,5)^2 + ...$$

$$(61-40,5)^2 + (30-40,5)^2$$

$$S = 9,5^2 + (-5,5)^2 + ... + 20,5^2 + (-10,5)^2$$

$$S = 90,25 + 30,25 + ... + 420,25 + 110,25$$

$$S = 1146$$

$$W = \frac{S}{S_{max}}$$

egyetértési

összhang

szignifikancia

$9(8-1)\ 0,337$

$= n-1 = 8-1 =$

számitott

kritikus tartományba

$$\chi^2_{sz} > \chi^2_{krit}$$

Ezzel W = ...

$$W = \frac{1146}{3402} = 0,337 \text{ az } ....$$

együttható, azaz az .... mértéke: 0,337.

Végezzük el a .... vizsgálatot.

Nullhipotézisünk: H_o: nincs egyetértés, véletlenszerűen helyezkednek el a rangszámok.

Mivel a VII. táblázatban n = 7 érték szerepel csak, felhasználhatjuk a következőt:

Az m(n-1)W mennyiség DF = n-1 szabadságfoku χ^2 eloszlást követ. Tehát statisztikai próbának a χ^2-próbát választjuk.

Választott szignifikancia szintünk $\alpha = 1\%$ χ^2 számitott értékének meghatározása:

$$\chi^2_{sz} = m(n-1)\ W$$

$$\chi^2_{sz} = ... = 21,2$$

szabadsági fokok száma:

$$DF = ... = 7$$

A DF = 7 szabadsági fokhoz $\alpha = 0,01$ szinten $\chi^2_{krit} = 18,3$ kritikus érték tartozik. A kritikus érték és a........ (χ^2_{sz}) érték összehasonlitásából látható, hogy χ^2_{sz} a .... esik, s ezért a nullhipotézisünket elutasitjuk.

χ^2_{sz} ....

H_o-t elutasitjuk, mert W értékében .... összhang mutatkozik. | szignifikáns

Ezért elkészithetjük a .... alapján az ugynevezett eredő rangsort, amely általános minősitést takar. Az eredő rangsor meghatározására táblázatot készitettünk. | rangszámösszegek

Tipus	R_i	Eredő rangsor
A	50	7
B	35	4
C	47	6
D	21	1
E	46	5
F	34	3
G	61	8
H	30	2

Az eredő rangsor tanusága szerint sorrendben a D,H,F,B,E,C,A,G tipusu rádiókészülékek elégitik ki leginkább a vásárlók igényeit. Ismételten felhivjuk a figyelmet, hogy csak abban az esetben készithető eredő rangsor, ha W értéke .... összhangot mutat. Egyébként - ellenkező esetben - az eredő rangsornak .... jelentést sem tulajdonithatunk.

szignifikáns

semilyen

2. Egy textilgyárban a fonalcsévék homogén festésének minősitése a következőképpen történik. Az egyes festett csévéket amelynek a szinhomogenitását kell ellenőrizni tiz-tiz részcsévére bontják. Az igy nyert

részcsévéket tiz betanitott és a célra alkalmas munkás értékeli szinárnyalat szerint. Ha az egy csévéből származó részcsévék között az értékelők nem tudnak különbséget tenni a festés homogénnek tekinthető és felhasználható, ellenkező esetben selejtes a fonal.

Az értékelés pontosabb módszer hiányában szemmel történik. Az értékelők az eredményt rangsor formájában adják meg. A megegyező szinárnyalatu részcsévék a rangszámuk átlagát kapják.

A rendelkezésre álló adatokat a következő táblázat tartalmazza.

Értékelő / Részcséve	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	R_i
A	5,5	6,5	5	5,5	5	8	9	7	5,5	4	61
B	5,5	6,5	5	5,5	5	8	9	7	5,5	9	66
C	5,5	6,5	5	5,5	5	8	5,5	7	5,5	4	57,5
D	5,5	2	5	5,5	5	2	5,5	2,5	5,5	4	42,5
E	5,5	6,5	5	5,5	5	5	2	2,5	5,5	4	49
F	5,5	6,5	5	5,5	5	5	2	2,5	5,5	4	46,5
G	5,5	2	5	5,5	5	2	2	2,5	5,5	4	39
H	5,5	6,5	5	5,5	5	2	5,5	7	5,5	4	51,5
I	5,5	6,5	5	5,5	5	5	5,5	7	5,5	9	59,5
J	5,5	10	10	5,5	10	10	2	10	5,5	9	77,5

Megoldás

Ha szignifikáns véleményegyezés van a birálók között, akkor feltehető, hogy az egyes részcsévék festése nem homogén. (Pl.: valamennyien ugyanazt a csévét tartják a többitől eltérő árnyalatunak.) Ha a birálók között nincs egyetértés, akkor a rangszámok csak a véletlen következtében ingadoznak, a festés tehát homogén. A megoldás során meghatározzuk a ....-féle egyetértési együtthatót, majd elvégezzük ennek .... vizsgálatát. A Kendall-féle egyetértési együttható:

Kendall szignifikancia

$$W = \ldots\ldots\ldots = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2(n^3-n)-K}$$

$$\frac{S}{S_{max} - K}$$

Mivel az adattáblázatban nagyszámu rangszámegyezés vagy másként kötés fordul elő a K korrekciós faktor jelen esetben nem egyenlő 0-val.

$$W = \frac{}{S_{max}-K} = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2(n^3-n)-m \sum_{j=1}^{m} T_j}$$

$$T_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{p} (t^3 - t)_k$$

ahol:

t : a kötéscsoportban előforduló azonos rangszámok száma

p : a kötéscsoportok száma egy rangsoron belül.

Számoljuk ki ezek után W értékét. S meghatározásához először ...... értékét kell kiszámitani

$\bar{R}$

$$\bar{R} = \frac{m(n+1)}{2} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{10(10+1)}{2} = 55$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i-\bar{R})^2 = \ldots\ldots + (66-55)^2 +$$

$$(61 - 55)^2$$

$$+ \ldots\ldots = 1222,5$$

$$(77,5 - 55)^2$$

Ez után határozzuk meg a T_j értékeit minden egyes birálóra

$\frac{1}{12}(3^3-3)$

$\frac{1}{12}(9^3-9)$

(10^3-10)

$\frac{1}{12}(3^3-3) = 6$

$$\frac{1222,5}{\frac{1}{12}10^2(10^3-10)-10.447}$$

$$T_1 = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{1}(t^3-t)_k = \frac{1}{12}(10^3-10) = 82,5$$

$$T_2 = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{2}(t^3-t)_k = \frac{1}{12}(6^3-6) + \ldots\ldots =$$

$$= 19,5$$

$$T_3 = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{1}(t^3-t)_n = \ldots\ldots\ldots\ldots = 60$$

A továbbiakban csak behelyettesitve

$$T_4 = \frac{1}{12}\ldots\ldots = 82,5$$

$$T_5 = \frac{1}{12}(9^3-9) = 60$$

$$T_6 = \frac{1}{12}(3^3-3) + \frac{1}{12}(3^3-3) + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$T_7 = \frac{1}{12}(3^3-3) + \frac{1}{12}(4^3-4) + \frac{1}{12}(3^3-3) = 9$$

$$T_8 = \frac{1}{12}(5^3-5) + \frac{1}{12}(4^3-4) = 15$$

$$T_9 = \frac{1}{12}(7^3-7) + \frac{1}{12}(3^3-3) = 82,5$$

$$T_{10} = \frac{1}{12}(7^3-7) + \frac{1}{12}(3^3-3) = 30$$

$$\sum_{j=1}^{10} T_j = 447$$

$$W = \frac{}{S_{max}-K} = \ldots\ldots\ldots = 0,32$$

W értéke az egyetértés mértékét mutatja. Természetesen szeretnénk megállapitani, hogy ez a 0,32-es egyetértés mutató meghatározott szignifikancia szinten mit jelent?

A választ χ^2 próba segitségével kapjuk meg. Szakmai hipotézisünk W = 0,32 alapján, hogy a birálók között........ van — egyetértés

H_o: az értékelők között.............. — nincs egyetértés

Tudjuk, hogy az m(n-1)W = ... eloszlást követ. — χ^2

χ^2_{sz} = m(n-1)W = ... = 28,8 — 10(10-1)0,32

DF = ... α = 5% — n-1=10-1 = 9

χ^2_{krit} = ... — 16,9

χ^2_{sz} .... χ^2_{krit} — $\gg$

H_o-t .... A birálók között — elutasitjuk

.... van. A cséve festése az egyes birálók szignifikáns egyetértése miatt nem tekinthető homogénnek. — egyetértés

3. Egy tiz tagu brigád, szocialista munkaversenyben kiérdemelt jutalmát, az eredményhez való hozzájárulás arányában szeretné egymás között felosztani. Ezért a többdimenziós itéletalkotás érdekében két módszerrel értékelték a brigádtagokat.

   a) A brigádvezető, a szakszervezeti bizalmi, az üzemvezető és két választott brigádtag páronkénti összehasonlitással értékelte az egyes brigádtagokat ugy, hogy az alábbi táblázatba 1-est irt oda, ahol a sorbeli személy munkaversenyben való részvételét többre értékelte az oszlopbelinél.

Brigád-tagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	-	0	1	1	0	1	1	1	0
C	0	1	-	1	1	1	1	1	0	1
D	0	0	0	-	1	0	0	1	0	0
E	0	0	0	0	-	0	0	1	0	0
F	0	1	0	1	1	-	1	1	1	1
G	0	0	0	1	1	0	-	1	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0
I	0	0	1	1	1	0	1	1	-	1
J	0	1	0	1	1	0	1	1	0	-

A táblázat az átlóra nézve szimmetrikusan komplementer eredményeket tartalmaz. Az igy elkészült 5 táblázat alapján egy összesitő táblázatot készitettek az egyesek összeadásával.

Brigád-tagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	-	4	4	5	5	5	5	5	5	4
B	1	-	2	4	5	2	4	5	2	2
C	1	3	-	5	5	4	5	5	4	5
D	0	1	0	-	4	0	2	4	0	1
E	0	0	0	1	-	1	4	0	0	0
F	0	3	1	5	5	-	5	5	4	2
G	0	1	0	3	4	0	-	4	1	0
H	0	0	0	1	1	0	1	-	0	1
I	0	3	1	5	5	1	4	5	-	3
J	1	3	0	4	5	3	5	4	2	-

b) A többi hét brigádtag is rangsorolta a brigád tagjait és saját magát is. Az összegezett rangsorokat a következő táblázat tartalmazza:

Brigád-tagok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	R_i
A	1	1	1	1	1	1	1	7
B	5	5	6	7	8	5	6	42
C	3	2	2	3	2	2	4	18
D	4	6	5	6	7	7	5	40
E	7	7	9	8	6	9	9	55
F	2	3	3	2	3	4	3	20
G	8	8	7	5	10	8	8	54
H	9	10	8	10	5	10	10	62
I	6	4	4	4	4	3	2	27
J	10	9	10	9	9	6	7	60

ahol:

R_i: a rangszámösszeg.

Vizsgáljuk meg, hogy van-e egyetértés az értékelők között, s egyetértés esetén állapitsuk meg az eredő értékelő rangsort!

Megoldás

a) A páronkénti összehasonlitás alapján készült táblázatban cellánként ki kell számitanunk a birálópárok közötti véleményegyezések számát, amely a következő

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

Ahol: k : a táblázat celláiban szereplő szám.

Az igy kiszámitott értékeket a következő táblázatban tüntettük fel:

	Brigád-tagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sor-összeg
6 10	A	-	6	.	10	..	10	10	10	10	6	78
	B	0	-	1	6	10	1	6	10	1	1	36
	C	0	3	-	10	10	6	10	10	6	10	65
	D	0	0	0	-	6	0	1	6	0	0	13
	E	0	0	0	0	-	0	0	6	0	0	6
	F	0	3	0	10	10	-	10	10	6	1	50
	G	0	0	0	3	6	0	-	6	0	0	15
	H	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0
	I	0	3	0	10	10	0	6	10	-	3	42
	J	0	3	0	6	10	3	10	6	1	-	39
	Oszlop-összeg	0	18	7	55	72	20	53	74	24	21	344

Számitsa ki és irja be a táblázatban az

6 AC cella $C_k^2 = \ldots\ldots\ldots$

10 és az AE cella $C_k^2 = \ldots\ldots$

értékeit.

k másod Ez nem más, mint ... elem .... osztályu kombinációja. Az AC cella esetében a 4 egyetértő biráló közül

6 egy pár összesen .... féleképpen választható ki.

A birálók közötti egyetértés mértéke az

$$A = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C_k^2)}{C_m^2\, C_n^2} - 1$$

egyetértési együtthatóval határozható meg.

Ahol m : a birálók száma $m = \ldots\ldots$ — 5

n : az értékelt személyek száma $n = \ldots$ — 10

Tudjuk, hogy A értéke maximálisan ... lehet. Minimális értéke páros számu biráló esetén — 1

$$\frac{-1}{m-1}$$

páratlan számu biráló esetében $\frac{-1}{m}$

Határozzuk meg a nevezőben levő

$$C_m^2 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = 10 \qquad \frac{m(m-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} =$$

$$C_n^2 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = 45 \qquad \frac{n(n-1)}{2} = \frac{10(10-1)}{2}$$

értékeit.

Tehát

$$A = \ldots\ldots = 0{,}53 \qquad \frac{2.344}{10.45} - 1$$

Az $A = 0{,}53$ egyetértési együttható szignifikancia vizsgálata a következőképpen végezhető el:

$$a\ \frac{4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C_k^2)_{i,j}}{m-2} - \frac{m(m-1)(m-3)n(n-1)}{2(m-2)^2}$$

mennyiség

$$DF = \frac{m(m-1)\ n(n-1)}{2(m-2)^2}$$

szabadságfoku .... eloszlást követ. — χ^2

Felállitjuk a nullhipotézist

H_o : a brigádok között................ — nincs egyetértés

$$\frac{5(5-1)(5-3)10(10-1)}{2(5-2)^2}$$

$$\frac{5(5-1)\,10(10-1)}{2(5-2)^2}$$

124,3

$<$

elvetjük

levonjuk

sorösszegeiből
oszlop

$$\chi^2_{sz} = \frac{4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C_k^2)_{i,j}}{m-2} - \frac{m(m-1)(m-3)\,n(n-1)}{2(m-2)^2} =$$

$$= \frac{4.344}{5-2} - \dots\dots\dots\dots = 259$$

$$DF = \frac{m(m-1)n(n-1)}{2(m-2)^2} = \dots\dots\dots = 100$$

A szignifikancia szintet $\alpha = 5\%$-nak választjuk

$\chi^2_{krit} = \dots\dots\dots$

$\chi^2_{sz} = 259$

$\chi^2_{krit} \dots\dots \chi^2_{sz}$

A nullhipotézist .... A birálók között egyetértés van.

Ezek után felirhatjuk a páronkénti összehasonlitással kapott rangsort. Az egyes személyek részére történt egybehangzó értékelések összegéből .... az elutasitó itéletek számát.

Tehát a táblázat .... páronként levonjuk az .... összegeket.

Brigádtagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Sorösszeg	78	36	65	13	6	50	15	0	42	39
Oszlopössz.	0	18	7	55	72	20	53	74	24	21
Különbség	78	18	58	-42	-66	30	-38	-74	18	18
Rangsor	...	5	...	...	...	...	...	...	5	5

1, 2,8,9,3,7,10

Irjuk be a hiányzó rangsorokat!

Az azonos különbséggel rendelkező brigádtagokat a megfelelő rangszámok .... jelöltük. Ezt az esetet rendszám egyezésnek vagy kötésnek nevezzük.

átlagával

b) A többi hét brigádtag által készitett rangsorok között az egyetértés mértékét a .... -féle egyetértési együtthatóval vizsgálhatjuk meg.

Kendall-

$W = ...$

$= \frac{S}{S_{max}-K}$, $K = 0$

ahol

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2$$

$$\bar{R} = \frac{m(n+1)}{2} = ... = 33,5$$

$\frac{7(10+1)}{2}$

Tehát a rangsorokat tartalmazó táblázat adataiból

$$S = (....-33,50)^2 + (....-33,5)^2 + ...+ + (....-33,5)^2 = 3428,2$$

7; 42

60

$$S_{max} = \frac{1}{12} m^2 (n^3 - n) = ... = 4042,5$$

$\frac{1}{12} 7^2(10^3-10)$

$$W = \frac{S}{S_{max}} = ... = 0,84$$

$\frac{3428,2}{4042,5}$

nincs

χ^2

7(10-1) 0,84

10-1 = 9

16,9

<

egyetértés

5, 8, 7,5 9

Végezzük el W szignifikancia vizsgálatát.

H_o: a rangsorolók között .... egyetértés. Tudjuk, hogy $m(n-1)$ W.... eloszlást követ.

$\chi^2_{sz} = m(n-1)\ W = ... = 53,42$

A szignifikancia szintet $\alpha = 5\%$-nak választjuk.

DF = n-1 = ...

χ^2_{krit} = ...

χ^2_{sz} .... χ^2_{krit}

A nullhipotézist elutasitjuk, az értékelők között .... van.

A rangösszegek alapján az eredmény:

Brigádtag	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Rangszám összeg	7	42	18	40	55	20	54	62	27	60
Eredő rangsor	1	6	2	..	..	3	7,5	..	4	..

Nézzük meg, hogy a két különböző módon kapott rangsor milyen mértékben egyezik egymással. Készitsük el az összefoglaló táblázatot.

Brigádtagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
a) rangsor	1	5	2	8	9	3	7	10	5	5
b) rangsor	1	6	2	5	8	3	7	10	4	9
d_i (rangszám különbség)	0	1	0	3	1	0	0	0	1	4
d_i^2	0	1	0	9	1	0	0	0	1	16

A két rangsor közötti összefüggés mértékét a Spearman-féle rangkorrelációs együtthatóval vizsgálhatjuk

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

ahol n: a rangszámok száma, d_i: a páronkénti rangszámkülönbség. A számitáshoz szükséges értékeket a táblázatban feltüntettük.

Helyettesitsünk be:

$$R = 1 - \frac{4 \sum_{i=1}^{10} d_i^2}{10^3 - 10} = \ldots\ldots = 0{,}83 \qquad 1 - \frac{6.28}{990}$$

A Spearman-féle rangkorrelációs együttható szignifikancia vizsgálatára a VI. táblázat használható.

H_o : a két rangsor között nincs összefüggés, azaz

R = ... 0

α = 5%

R_{krit} = ... 0,564

R ..... R_{krit} >

A nullhipotézist elutasitjuk a két rangsor között korreláció van.

Végül készitsük el a két eredő rangsor alapján az összes megkérdezett véleményét tükröző összesitett értékelést.

Brigád-tagok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
a) rangsor	1	5	2	8	9	3	7	10	5	5
b) rangsor	1	6	2	5	8	3	7	10	4	9
Rangszám összeg	2	11	4	13	17	..	..	..	..	..
Értékelés	1	5	2	6	8	..	..	..	..	..

6; 14; 20; 9; 14

3; 7; 5; 9; 4; 7

A fentiek alapján már könnyen feloszthatjuk a kiérdemelt jutalmat.

4. Egy vállalat szociálpszichológiai vizsgálatot végeztetett 5 vezető beosztásu müszaki dolgozójával. A következő kérdésekre kerestek választ:*

a) Az egyéni döntések mennyiben térnek el a csoportdöntéstől?

b) a csoportdöntés hogyan befolyásolja az egyéni döntést?

c) a csoporttevékenységet tekintve, ki játssza az informális vezető szerepét?

d) milyen a csoport hatékonysága az adott témacsoportban folytatott vita során?

A vizsgálat a következőképpen zajlott le:

Kiválasztott 7 gyártmányt kellett rangsorolni müszaki-gazdasági megfontolások alapján.

---

* A feladatban közölt módszert a Budapesti Müszaki Egyetem Ipari Üzemgazdaságtan Tanszékén dr. Harsányi István egyetemi tanár vezetésével a "Vezetői alkalmasság" c. tanulmány kapcsán dolgoztuk ki.

A gyártmányok kiválasztása ugy történt, hogy a hátrányok és előnyök közel azonosak legyenek, de az értékelésnél olyan szempontok is közrejátszanak, melyeket számszerüsiteni - legalább is egyértelmüen és egyszerüen - nem lehetett (várható piaci siker, gyártási szimpátia az üzemben stb.).

A vizsgálat menete a következő volt:

I. Minden személy egyénileg döntött a sorrendről (előzetes egyéni döntés: EED)

II. A vizsgált személyek - vitamegbeszélésen - közösen döntötték el a sorrendet (csoportos döntés: CSD)

III. A vita után minden személy - egymástól függetlenül - ismét rangsorolta a gyártmányokat (korrigált egyéni döntés: KED)

A döntéseket a következő táblázat tartalmazza:

Gyártm.	CSD	Kovács EED	Kovács KED	Kiss EED	Kiss KED	Nagy EED	Nagy KED	Szabó EED	Szabó KED	Tóth EED	Tóth KED
A	1	6	2	2	1	1	1	7	1	3	3
B	2	1	1	4	2	3	3	2	3	2	2
C	3	3	3	7	7	2	2	1	2	5	5
D	4	2	4	6	6	4	4	4	5	7	7
E	5	5	5	1	3	7	7	6	7	1	1
F	6	7	7	3	4	6	6	5	6	4	4
G	7	4	6	5	5	5	5	3	4	6	6

A táblázat adatait az egyszerübb számolás érdekében ugy rendeztük, hogy a csoportrangsor növekvő sorrendü legyen, s ezután rendeltük az egyes gyártmányokhoz az A, B, C nagybetüit.

Megoldás

A feltett kérdések sorrendjében a következő:

a) arra, hogy az előzetes egyéni döntés (EED) mennyiben tér el a csoport döntésétől (CSD) a Spearman-féle .... együttható számitása ad választ. A Spearman-féle együttható .... n elemü rangsor összehasonlitására alkalmas:

rangkorrelációs

két

$$R=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)},$$

ahol:

d_i : ....

összehasonlitott rangszámok különbsége

n : ....

rangsor elemeinek száma

A kérdés megválaszolásához tehát ki kell számitani minden személy vita előtti döntésének (EED) és a csoportdöntés (CSD) közötti ....
....

rangkorrelációs együtthatóját.

Az adatok felhasználásával a következő táblázatot állithatjuk össze a d_i páronkénti rangszámkülönbségekre (EED-CSD):

Gyártmány	Kovács d_i	Kovács d_i^2	Kiss d_i	Kiss d_i^2	Nagy d_i	Nagy d_i^2	Szabó d_i	Szabó d_i^2	Tóth d_i	Tóth d_i^2	
A	5	25	1	1	0	0	6	36	2	4	
B	-1	1	2	4	1	1	0	0	0	0	
C	0	0	4	16	-1	1	..	..	2	4	-2; 4
D	-2	4	..	..	0	0	0	0	3	9	2; 4
E	0	0	-4	16	2	4	1	1	-4	16	
F	1	1	-3	9	0	0	-1	1	2	4	
G	..	..	-2	4	-2	4	-4	16	-1	1	-3; 9
$\sum_{i=1}^{7} d_i^2$	40		54		10		...		38		

a nevező mind az 5 személyre:

$$n(n^2-1) = 7.48 = 336$$

Ezekkel az adatokkal most már kiszámithatjuk mind az 5 személy döntéseinek a csoportdöntésekhez viszonyitott korrelációs együtthatóit:

$$R_{EED\text{-}CSD}$$

	Kovács	Kiss	Nagy	Szabó	Tóth	
$R_{EDD\text{-}CSD}$	0,286	0,036	0,822	.....	0,322	-0,035
Szorossági sorrend	3	4	1	5	2	

Az igy kiszámitott korrelációs együtthatók az egyéni döntések eltérésének a mértékére adnak választ, s ezek alapján a döntések "szorossági sorrendje" is felállitható.

A sorrend megitéléséhez tudnunk kell, hogy a Spearman-féle együttható

$-1 \leq R \leq 1$

értéke .... zárt intervallumban helyezkedik el.

Előző táblázatunkból látható, hogy Nagy döntése áll közelebb a csoportdöntésekhez, ill. - forditva - a csoportdöntések Nagy véleményét fejezik ki a legjobban:

korrigált egyéni

Spearman-féle

szorossági sorrendet

b) a csoportvita hatásának a mértékét az egyéni döntésekre, ugy állapithatjuk meg, hogy az előzetes egyéni döntés (EED) és a .... döntés (KED) közti .... rangkorrelációs együtthatókat kiszámitjuk és ezek alapján értékeljük az egyes egyéni döntések változását, vagyis ismét felállitjuk a........... .... Mind az 5 személyre meghatározva a d_i különbségeket (EED-KED) a következő táblázatot állithatjuk fel:

0; 0

-2; 4

-1; 1

Gyártmány	Kovács d_i	Kovács d_i^2	Kiss d_i	Kiss d_i^2	Nagy d_i	Nagy d_i^2	Szabó d_i	Szabó d_i^2	Tóth d_i	Tóth d_i^2
A	4	16	1	1	0	0	6	36	0	0
B	0	0	2	4	0	0	-1	1	0	0
C	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
D	-2	4	0	0	0	0	-1	1	..	..
E	0	0	..	..	0	0	-1	1	0	0
F	0	0	-1	1	0	0	..	..	0	0
G	-2	4	0	0	0	0	-1	1	0	0
$\sum_{i=1}^{7} d_i^2$	24		10		0		42		0	

336

A nevező ismét: $n(n^2-1) =$ ....

Ezekkel az adatokkal már kiszámolhatjuk a .... korrelációs együtthatót. Eredményeinket a következő táblázat foglalja össze:

$R_{EED\text{-}KED}$

	Kovács	Kiss	Nagy	Szabó	Tóth
$R_{EED\text{-}KED}$	....	0,822	1,00	0,250	....
Szorossági sorrend	4	3	1,5	5	1,5

0,572 1,00

A szorossági sorrend felállitására az előbbiekben elmondottak érvényesek, azzal a kiegészitéssel, hogy ha korrelációs együttható azonos értéküre adódik - jelen esetben Nagynál és Tóthnál egyaránt R = 1,0 adódott - akkor a közös rangszámnak az R értékének megfelelő helyezések - jelen esetben 1 és 2 - számtani közepét adjuk (1,5).

A kiszámolt korrelációkat értékelve megállapithatjuk, hogy a csoportvita nem befolyásolta sem Nagy, sem Tóth döntéseit. A másik három személy döntéseit azonban a felállitott szorossági sorrend mértékében megváltoztatta a csoportvita; a legnagyobb változást, eltérést Szabó döntéseinél találunk.

Részben még az a) kérdésre kapunk választ, ha megvizsgáljuk a csoportdöntések és a korrigált egyéni döntések közötti korrelációs együtthatókat. Ehhez az első táblázatunkból most a d_i = (CSD-KED) különbségeket kell kikeresnünk és ebből az .... együtthatókat kiszámitanunk. A kapott eredményeket a következő táblázatok összesitik.

$R_{CSD\text{-}KED}$

	Gyártmány	Kovács d_i	Kovács d_i^2	Kiss d_i	Kiss d_i^2	Nagy d_i	Nagy d_i^2	Szabó d_i	Szabó d_i^2	Tóth d_i	Tóth d_i^2
	A	-1	1	0	0	0	0	0	0	-2	4
	B	1	1	0	0	-1	1	-1	1	0	0
-4; 16	C	0	0	..	..	1	1	1	1	-2	4
-3; 9	D	0	0	-2	4	0	0	-1	1	..	..
	E	0	0	2	4	-2	4	-2	4	4	16
	F	-1	1	2	4	0	0	0	0	2	4
2; 4	G	1	1	2	4	..	..	3	9	1	1
	$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 =$		4		36		10		16		38

Ezzel a korrelációs együtthatók és a sorrend:

0,822; 0,322

	Kovács	Kiss	Nagy	Szabó	Tóth
$R_{CSD-KED}$	0,929	0,429	..	0,715	..
Szorossági sorrend	1	4	2	3	5

Összesitjük az eddig kapott eredményeinket:

	Kovács	Kiss	Nagy	Szabó	Tóth
$R_{EED-CSD}$	0,286	0,036	0,822	-0,035	0,322
sorrend	3	4	1	5	2
$R_{EED-KED}$	0,572	0,822	1,000	0,250	1,000
sorrend	4	3	1,5	5	1,5
$R_{CSD-KED}$	0,929	0,429	0,822	0,715	0,322
sorrend	1	4	2	3	5

Ahhoz, hogy a c) kérdésre, az előbbi táblázat adatait elemezve válaszolhassunk, előzőleg a d) kérdést kell megválaszolnunk.

d) A csoport, vita során tanusitott hatékonyságát a Kendall-féle egyetértési együttható segitségével tudjuk mérni.

Jelölje:

W_{EED}: a csoportban a megbeszélés előtti egyetértést,

W_{KED}: a csoportvita utáni egyetértést, akkor a két W összehasonlitása esetén a következő lehetőségek vannak:

$W_{EED} > W_{KED}$: a vita során az egyetértésben .... mutatkozik (esetleg ellenérzés) — visszafejlődés

$W_{EED} \cong W_{KED}$: nincs fejlődés, változás

$W_{EED} < W_{KED}$: .... tapasztalható meg kell vizsgálni, kinek a hatására — fejlődés

$W_{EED} \ll W_{KED}$: ...., feltételezhetően sikeres vezető hatására — határozott fejlődés

Számitsuk ki a döntések Kendall-féle együtthatóit (K = 0, mivel kötés nincs):

$$W = \frac{S}{S_{max}}, \text{ ahol: } S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2$$

$$\bar{R} = \frac{m(n+1)}{2} :$$

$$S_{max} = \frac{1}{12} m^2 (n^3 - n)$$

Mindkét vizsgálandó döntéscsoportra azonos:

$$\bar{R} = \frac{5(7+1)}{2} = 20 \quad \text{és}$$

$$S_{max} = \frac{1}{12} 5^2 (7^3 - 7) = \frac{25}{12} (343 - 7)$$

$$= \frac{25.336}{12} = 700$$

Az S számitását táblázatosan végezzük el:

	Gyárt-mány	R_i=EED	$(R_i - 20)^2_{EED}$	R_i=KED	$(R_i - 20)^2_{KED}$
	A	19	1	8	144
	B	12	64	11	81
18; 4	C	..	..	19	1
23; 9	D	..	..	26	36
23; 9	E	20	0	..	..
27; 49	F	25	25	..	..
	G	23	9	26	36

$$S_{EED} = 112 \qquad S_{KED} = 356$$

Most már kiszámithatjuk mindkét döntéscsoport Kendall-féle együtthatóit:

$$W_{EED} = \frac{S_{EED}}{S_{max}} = \frac{112}{700} = 0{,}16$$

$$W_{KED} = \frac{S_{KED}}{S_{max}} = \frac{356}{700} = 0{,}50$$

Mindkét együttható szignifikancia vizsgálatát .... végezzük el.

χ^2 próbával

$$\chi^2_{sz,EED} = m(n-1)\, W_{EED} = 5(7-1).0,16=$$

$$= 30.0,16 = 4,80$$

A kritikus érték 5%-os szignifikancia szinten és DF = n-1 = 7-1 = 6-nál

$\chi^2_{krit} = 12,6$ $\chi^2_{szám} = 4,8$, tehát az előzetes egyéni döntések alapján számított Kendall-féle egyetértési együttható a választott 5%-os szignifikancia szinten ....

nem szignifikáns

$\chi^2_{sz,KED} = 30.0,5 = 14$ $\chi^2_{krit} = 12,6$,

tehát a korrigált egyéni döntések alapján számított együttható, az előbbi szignifikancia szinten, már .... vagyis ez azt jelenti, hogy a vita során .... alakult ki, vagyis a csoportvita után az egyéni döntések (KED) határozottan .... a csoport döntéséhez.

szignifikáns

határozott egyetértés

közeledtek

c) Ezek után megvizsgáljuk, hogy a vita során a csoportban kinek a véleménye dominált, vagy másként, ki játszotta az informális vezető szerepét.

Az összesitő táblázatunkat elemezve a következőket állapithatjuk meg:

- Nagy és Tóth ragaszkodott előzetes egyéni véleményéhez ($R_{EED-KED}$ = = 1,00)
- Nagy egyéni, előzetes véleményét fejezte ki legjobban a csoportdöntés

($R_{EED\text{-}CSD}$ = 0,822) ezért Nagynak tulajdonitható a vitában a vezető szerep.

- Nagy hatására a többiek véleménye közeledett az elfogadott csoportdöntéshez, sőt Kovács ezt a véleményt végül csaknem teljesen magáévá is tette ($R_{CSD\text{-}KED}$ = 0,929).
- Tóth ugyan ragaszkodott előzetes, egyéni véleményéhez, de ez semmi hatással nem volt a többiekre, korrigált döntése a leginkább eltér a többiekétől.

A fenti megállapitások természetesen csak abban az esetben igazak, ha feltételezzük, hogy a meggyőzés érveken és nem tényeken alapult. Végezetül nézzük meg, hogy a csoportos döntés és a korrigált egyéni döntések alapján számitható eredő rangsor milyen mértékben egyezik meg? Ehhez a két rangsor Spearman-féle rangkorrelációs együtthatóját kell kiszámitanunk.

Gyártm.	CSD	eredő rangsor	d_i	d_i^2
A	1	1	0	0
B	2	2	0	0
C	3	3	0	0
D	4	5,5	1,5	2,25
E	5	4	1,0	1,0
F	6	7	1,0	1,0
G	7	5,5	1,5	2,25
			$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 6,5$	

$$R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{7} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6.6,5}{336} = 0,89$$

A korrelációs együttható magas értéke jó egyezést mutat a két döntés között, s mivel

α = 5%-os szinten

$$R_{krit} = 0,714 < R_{szám},$$

igy eredményünk .... is. szignifikáns

A csoport véleménye a vita során meglehetősen homogénná vált, amely a korrigált egyéni döntésekben is kifejezésre jutott.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Számitsa ki két 5 rangszámból álló rangsor esetén lehetséges Spearman-féle rangkorrelációs együtthatók értékeit! (19 különböző érték.)

2. Határozza meg a lehetséges maximális és minimális Kendall-együtthatók értékeit 3 rangsoroló és 5 rangsorolt esetében, a felirt rangsorok alapján! (1, 0)

3. Rajzolja fel a 3. feladatban szereplő páronkénti összehasonlitás preferencia poligonját (külön-külön az egyes összehasonlitást végzők esetére!!

8. VARINCAI- ÉS KOVARIANCIAANALÍZIS

A variancia- és kovarianciaanalizis segitségével az adathalmaz teljes varianciáját olyan komponensekre bonthatjuk, amelyeknek egymáshoz viszonyitott nagysága jellemző az adathalmaz ingadozását létrehozó ható okok relativ nagyságára. Ennek segitségével eldönthető, hogy egy vagy több tényező gyakorol-e jelentős hatást valamely jellemzőre.

A módszer alkalmazásának előfeltétele, hogy a szereplő valószinüségi változók függetlenek, normális eloszlásuak és azonos szórásuak legyenek. Sok gyakorlati probléma esetén erről pontosan nincs módunkban meggyőződni, ekkor az előfeltételek fennállása kérdésében szakmai hipotézisekre támaszkodunk. Ezekben az esetekben azonban a következtetés során fokozott óvatossággal kell eljárnunk.

A varianciák felbontását táblázatos formában szoktuk elvégezni (lásd a feladatokat). A táblázat kialakitása a ható tényezők számától és az egyes tényezők között fennálló kölcsönhatástól (interakciótól) függ. A példatárban szereplő legbonyolultabb feladat: két tényező interakcióval. A módszer több ható tényező esetében is hasonlóan alkalmazható. A varianciák szignifikancia vizsgálatát F-próba segitségével végezzük el.

Az általános variancia felbontó táblázatot, különböző tényező számoknál (osztályozásoknál), annak bonyolultsága és helyigénye miatt nem irjuk fel, a módszer alkalmazása a feladatok áttanulmányozása során elsajátitható. A legegyszerübb feladat matematikai formában a következőképpen fogalmazható meg.

Legyen n független megfigyeléssorozat $m_1, m_2, \dots m_n$ megfigyeléssel. Az egyes változók közös σ szórással $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ várható értékkel rendelkeznek.

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = N \qquad \bar{x}_i' = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}}{m_i} \qquad \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}}{N}$$

ahol $x_{i,j}$ a megfigyelés egy eleme.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(x_{i,j}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(x_{i,j}-\bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$$

$$S_ö = S_1 + S_2 ,$$

ahol az egyes szabadságfokok

$$DF_{S_ö} = N - 1$$

$$DF_{S_1} = N - n$$

$$DF_{S_2} = n - 1$$

Ha a nullhipotézis igaz, akkor $s_2^2 = \frac{S_2}{n-1}$ torzitatlan becslés σ-ra. Szintén az előzőtől független becslés σ-ra az $s_1^2 = \frac{S_1}{N-n}$ mennyiség. s_1^2 és s_2^2 F-próbával összevetve nullhipotézisünk elfogadásáról, illetve elutasitásáról dönthetünk.

$$\left(F_{sz} = \frac{s_1^2}{s_2^2}\right)$$

A varianciaanalizis előfeltételét képező szórásazonosságot azonos mintaelemszámoknál az un. maximális F módszerével vizsgálhatjuk. Az egyes mintákból számitott legnagyobb és legkisebb variancia hányadosát összevetjük a V. táblázatban feltüntetett értékkel. (N a minták száma, m_i a minta elemszáma.) A táblázatot áttekintve megállapithatjuk, hogy a szokásos mintanagyságok esetén, ha a varianciák hányadosa nem nagyobb, mint 3, a szórások azonosnak fogadhatók el. Ha ez nem áll fenn, akkor a táblázat értékei alapján döntsünk! Különböző mintaelemszámok esetén az itt nem tárgyalt, számitásigényes Bartlett-próbát használhatjuk.

1. TV képcsövek felbontóképességére az elektronsugár által egy adott munkapontban az ernyőn gerjesztett világitó folt méretéből lehet következtetni. Négy gyártó cég azonos tipusu, azonos rendszerü elektronágyut tartalmazó képcsövei közül mintákat vizsgáltunk meg abból a célból, hogy eldönthessük, van-e különbség a különböző cégek gyártmányai között. Egy készülékgyártó szempontjából fontos kérdés, hogy a tapasztalt eltérések valódi különbséget takarnak-e, vagy csupán a véletlennek tulajdonithatók. Optikai mérőeszközzel mm-ben mért foltméreteket az alábbi táblázat tartalmazza.

Cégek / Mérés	I.	II.	III.	IV.
1	5,1	5,0	5,1	4,9
2	5,0	4,9	5,0	4,8
3	4,9	4,8	4,9	4,7
4	4,9	4,8	4,9	4,6
5	4,9	4,5	4,7	4,6
6	4,8	-	4,6	4,5
7	4,6	-	-	4,4
Átlag	4,88	4,8	4,86	4,64

Megoldás

Szakmai hipotézisünk, hogy az egyes cégek gyártmányai között van különbség, legjobb a IV. cég gyártmánya. Nullhipotézisünket a szakmai hipotézisünk .... fogalmazhatjuk meg matematikai pontossággal,

ellentettjeként

konkrét állitásként

azonos

H_o

szórásu normális

illeszkedés

központi határeloszlás

várható értékü

független

szignifikánsnak elfogadjuk.

hányadosát

...................., azaz az egyes gyártmányok között nincs különbség, az egyes minták .... várható értékü alapsokaságból származnak. Vagyis

........: $\mu_I = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$

A megoldás módszeréül a variancia-analizist választjuk. A módszer alkalmazásának feltétele, hogy a minták azonos ...., ... eloszlásból származzanak. Az előbbiről pl. Bartlett próbával győződhetünk meg, az utóbbit nagyobb mintaszám esetén .... vizsgálattal dönthetjük el, vagy szakmai tapasztalatokra támaszkodhatunk.

Jelen példánkban feltételezzük az alkalmazás feltételeinek fennállását; a Bartlett próbát bonyolultsága miatt nem végezzük el, az eloszlás normalitását pedig a .... tételének érvényesülése alapján feltételezzük.

Példánkban a nullhipotézisünknek megfelelően, mintáink azonos .... alapsokaságból való eredetét kivánjuk igazolni. Ehhez az alapsokaság varianciájára két .... becslést készitünk, mégpedig

a) a minták közötti varianciára
b) a mintákon belüli varianciára

s az igy nyert két becslést F-próbával hasonlitjuk össze. Ha $F_{krit} > F_{sz}$, akkor a mintákban található különbséget nem tekintjük .... vagyis nullhipotézisünket ....

A számitás megkönnyitésére adatainkat lineárisan transzformáljuk. Ezt megtehetjük, mivel a varianciák .... fogjuk összehasonlitani.

Tehát alakitsuk át adatainkat a következő összefüggés szerint:

$$x' = 10x - 48$$

(A levonandó számot ugy választjuk meg, hogy közel essen az összes adat átlagához, s igy könnyen kezelhető kisszámokat kapjunk.)

Az igy transzformált adataink a következők:

Cégek / Mérés	I.	II.	III.	IV.
1	3	2	3	1
2	2	1	2	0
3	1	0	1	-1
4	1	0	1	-2
5	1	-3	-1	-2
6	0	-	-2	-3
7	-2	-	-	-4
Átlag	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$

Szükségünk van még a következő tényezőkre:

Mintáink összes elemszáma: N = 25

Minta elemek teljes összege: T = -1

A minták összesitett átlaga, a főátlag:

$$x = \frac{T}{N} = - \frac{1}{25}$$

a) A minták közötti variancia becslése:

A mintákon belüli hatást ugy küszöbölhetjük ki, hogy az előbbi táblázat minden elemét .... helyettesitjük.

saját minta átlagával

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2$$

Mérés \ Cég	I.	II.	III.	IV.
1	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
2	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
3	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
4	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
5	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
6	$\frac{6}{7}$	-	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$
7	$\frac{6}{7}$	-	-	$\frac{-11}{7}$
Átlag	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{7}$

A táblázat alapján felirhatjuk a négyzetösszegek minták közötti összegét.

Tehát:

$$S_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots =$$

$$= 7\left(\frac{6}{7} + \frac{1}{25}\right)^2 + 5\left(0 + \frac{1}{25}\right)^2 + 6\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{25}\right)^2 +$$

$$+ 7\left(-\frac{11}{3} + \frac{1}{25}\right)^2 = 25{,}04 \cong 25$$

Ezzel a variancia legjobb becslése:

$s_1^2 = \frac{S_1}{n-1}$ ahol: n : a minták száma

n-1 : DF_1, szabadság fok

Tehát a minták közötti variancia:

$$s_1^2 = \frac{25}{3} = 8,33$$

b) <u>A mintákon belüli variancia becslése:</u>

A minták közötti hatást ugy küszöbölhetjük ki, hogy a négyzetösszegek számitásnál az egyes elemekből kivonjuk a

.... saját mintaátlagukat

A táblázatok adataival, az

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (x_j - \bar{x}_i)^2$$ összefüggés

alapján a négyzetösszeg

$$S_2 = (3-\frac{6}{7})^2 + (2-\frac{6}{7})^2 + \ldots + (-2-\frac{6}{7})^2 +$$

$$+ (2-0)^2 + (1-0)^2 + \ldots + (-3-0)^2 +$$

$$+ (3-\frac{2}{3})^2 + (2-\frac{2}{3})^2 + \ldots + (-2-\frac{2}{3})^2 +$$

$$+ (1+\frac{11}{7})^2 + (0+\frac{11}{7})^2 + \ldots + (-4+\frac{11}{7})^2 =$$

$$= 63,9 \cong 64$$

A szabadságfokok számát itt, a mintákon belüli szabadságfokok összegezésével kell számitanunk, vagyis

$$DF_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 21$$ 6+4+5+6

vagy másként számitva:

$$DF_2 = N - n = 25 - 4 = 21$$

ahol n: .... a minták száma

N: .... a minták összes elemszáma legjobb

Ezzel a mintákon belüli variancia .... becslése:

$$s_2^2 = \frac{64}{21} = 3,04$$

Ezután összeállíthatjuk a varianciaanalizis táblázatunkat:

A variancia forrása	Négyzet-összeg	Szabad-ságfok	Varian-cia
Minták között	25	3	8,33
Mintákon belül	64	21	3,04
Összesen	89	24	--

A két variancia becslést F-próbával hasonlítjuk össze:

$$F_{sz} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

nagyobb

(előző eredményeinkből látható, hogy a számláló .... mint a nevező, tehát az F-próba elvégezhető)

Tehát: $F_{sz} = \frac{8,33}{3,04} = 2,78$

A számláló szabadságfoka: $DF_1 = 3$

A nevező szabadságfoka: $DF_2 = 21$

F táblázatból a kritikus F értéke, $\alpha = 5\,\%$ szignifikancia szint egyoldali próba esetén:

$$F_{krit} = 3,07$$

elfogadjuk

mivel $F_{krit} > F_{sz}$ a nullhipotézist .... azaz a minták azonos alappopulációból származnak. Tehát szakmai hipotézisünket a jelenleg vizsgált minta adatok alapján .... vagyis egyik cég képcsöveit sem tekinthetjük jobbnak a többiekéhez viszonyitva.

el kell vetnünk

Nyomatékkal felhivjuk azonban a figyelmet, hogy a kapott eredmény a példánkban vizsgált, N = 25 elemü mintára érvényes.

F táblázatunkból könnyen kikereshetjük azt a határt, ahol már szignifikáns különbség jelentekzik. Láthatjuk tehát, hogy az előbbi 4 cég (DF_1=...) gyártmányait vizsgálva, már DF_2 = = ...-nál F_{krit} kisebbre adódik F_{sz}-nél vagyis összesen N = ... elemü mintát vizsgálva már .... eltérést találhatnánk valamelyik cég képcsövei javára. Természetesen csak akkor, ha a minták átlagai, a nagyobb mintaszámnál is, az előbbiekhez hasonló értéküre adódnak.

DF_1 = 3

= 60

= 64

szignifikáns

A számitási munka megkönnyitésére, a varianciák becsléséhez szükséges négyzetösszegek számitására más, egyszerübb módszer is van. A továbbiakban ezt a módszert mutatjuk be, az előbb kidolgozott példánk adataira alkalmazva.

A kódolt adatok táblázatából indulunk ki:

a teljes összeg: T = -1 és az
összes elemszám: N = 25

segitségével kiszámitjuk az un. korrekciós faktort:

$$K = \frac{T^2}{N} = \frac{(-1)^2}{25} = \frac{1}{25}$$

4 - 1

$\frac{25}{3}$

a) A minták közötti variancia számitása

A minta összegeket négyzetre emeljük, majd osztjuk az illető minta elemszámával, az igy kapott számokat összeadva és levonva a korrekciós faktort, megkapjuk a minták közötti négyzetösszegeket.

Vegyük észre, hogy a mintákból számolt hányadosokat a korrekciós faktorhoz hasonlóan számoljuk; az igy kapott tényezőket k_i-vel jelölve, a keresett összefüggésünket a következő általános alakban irhatjuk fel:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i - K, \quad \text{behelyettesitve:}$$

$$S_1 = \frac{6^2}{7} + \frac{0^2}{5} + \frac{4^2}{6} + \frac{(-11)^2}{7} - \frac{1}{25} = 25$$

DF = n - 1 = ... = 3

Ezekkel a variancia:

$$s_1^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 8,33$$

b) A mintákon belüli variancia számitása

A mintákon belüli négyzetösszeg a teljes négyzetösszegből számitjuk.
Igy először minden mintaelemet négyzetre emelünk és összegezzük - mintán belül és minták között - s ebből levonjuk a korrekciós faktort, ekkor megkapjuk a teljes négyzetösszeget.

Cég / Mérés	I.	II.	III.	IV.	Σ
1	9	4	9	1	
2	4	1	4	0	
3	1	0	1	1	
4	1	0	1	4	
5	1	9	1	4	
6	0	-	4	9	
7	4	-	-	16	
Σ	20	14	20	35	89

$S_ö = \ldots\ldots\ldots\ldots \cong 89$ — $89 - \frac{1}{25}$

A mintákon belüli négyzetösszeg:

$S_2 = S_ö - S_1 = \ldots\ldots = 64$ — $89 - 25$

$DF_2 = DF_ö - DF_1 = \ldots\ldots\ 21$ — $24 - 3$

Ezekkel a mintákon belüli variancia:

$$s_2^2 = \frac{64}{21} = 3,04$$

Láthatjuk, hogy ezzel az egyszerűsitett módszerrel is, az előbbivel teljesen azonos eredményt kaptunk.

---

2. TV képcsövek fontos paramétere a felületi fényesség, ettől függ ugyanis, hogy nappali megvilágitás mellett is élvezhető képet kapjunk. Az adott munkapontban mért fényesség értékének növelésére technológiai módositást hajtottak végre az ernyő kikészitésében.

A kisérletek eredményeit a következő

táblázat tartalmazza. Az értékek mstilb-ben adottak, Weston fényelemmel mérve.

Réteg-vastag-ság \ Techno-lógia	Régi (1)	Uj (2)
Eredeti (1)	17,7 16,6 16,6 16,0 15,5	21,0 19,8 19,6 19,5 18,2
Átlagok	$\bar{x}_{11}=16,5$	$\bar{x}_{12}=19,7$
Megváltozott (2)	19,0 17,8 17,6 16,8 16,3	22,0 21,0 19,8 20,2 19,0
Átlagok	$\bar{x}_{21}=17,5$	$\bar{x}_{22}=20,4$

Megoldás

Szakmai hipotézisünk, hogy mindkét módositás megjavitja a felületi fényesség értékét. Nullhipotézisünket a szakmai hipotézis .... fogalmazzuk meg. A felületi fényesség független mindkét tényezőtől, azaz

ellentétjeként

H_0: ....

$\mu_{11}=\mu_{12}=\mu_{21}=\mu_{22}$

Példánkat kovarianciaanalizissel oldjuk meg, az előző példánk végén bemutatott, gyorsitott módszerrel. Eltérés csupán annyi, hogy a két tényező közötti kölcsönhatást is vizsgáljuk. Számos esetben előfordul ugyanis, hogy két tényező együttes hatása sokkal intenzivebben befolyásolja az eredmény értékét, mint az egyes tényezők külön-külön.

Transzformáljuk adatainkat az

x' = ... össze-

függés szerint.

= 10x - 170

Ismételten megjegyezzük, hogy adatainkat azért transzformálhatjuk eredményeink módositásának veszélye nélkül, mert további számitásaink során a varianciák .... hasonlitjuk össze.

hányadosát

Transzformált adataink

Rétegvastagság \ Technológia	Régi (1)	Uj (2)	Sorösszeg
Eredeti (1)	7 -4 -4 -10 -15	40 28 26 25 12	
Összeg	T_{11} = -26	T_{12} = 131	105
Megváltozott (2)	20 8 6 -2 -7	50 40 28 32 20	
Összeg	T_{21} = 25	T_{22} = 170	195
Oszlopösszeg	-1	301	T=300

Emeljük négyzetre a minták egyes elemeit és képezzük a minták sor- és oszlopösszegeit.

Techno- lógia / Réteg-vas-tagság	Régi (1)	Uj (2)	Sor-összeg
Eredeti (1)	49 16 16 100 225	1600 787 676 625 144	
Összeg	Q_{11}=406	Q_{12}=3829	4235
Megváltozott (2)	400 64 36 4 49	2500 1600 784 1024 400	
Összeg	Q_{21}=553	Q_{22}=6308	6861
Oszlopösszeg	959	10137	11096

A varianciák vizsgálatának elvégzése előtt, elemezzük az analizis alkalmazhatóságának feltételeit. Az eloszlás normalitását .... érvényessége alapján feltételezhetjük. Mintáink azonos szórásu alappopulációból való eredetét egyszerüsitett módszerrel vizsgáljuk.

központi határeloszlás tételének

Ha a legnagyobb és a legkisebb variancia hányadosa nem nagyobb, mint 3, akkor a szórások azonossága feltételezhető. Mivel hányadost vizsgálunk, elegendő csupán a négyzetösszegeket kiszámitanunk, nem szükséges a .... osztanunk.

szabadsági fokokkal

Ez a módszer igy csak .... esetén alkalmazható.

azonos mintaelem számok

A szórások azonosságának ellenőrzéséhez

számitsuk ki az egyes minták négyzetösszegeit.

$$S_{11} = 406 - \frac{(-26)^2}{5} \cong 271$$

$$S_{12} = 3829 - \frac{131^2}{5} \cong 397$$

$$S_{21} = \dots\dots\dots\dots \cong 428 \qquad 553 - \frac{25^2}{5}$$

$$S_{22} = 6308 - \frac{170^2}{5} = 528$$

$$\frac{S_{22}}{S_{11}} = \frac{528}{271} = 1{,}9 < 3,$$ tehát a szórások azonosságát .... elfogadjuk.

Az alapsokaság varianciájára négy ..... független becslést készitünk:

a) a technológiai változatok közötti variancia

b) a rétegvastagság változtatása szerinti variancia

c) a két változtatás kölcsönhatása

d) a maradék, vagy a véletlen hiba varianciája.

Becslések

a) A technológiai változatok közötti variancia számitása (T hatás)

A korrekciós faktor:

$$K = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 4500 \qquad = \frac{T^2}{N} = \frac{300^2}{20}$$

Az oszlop (techn. vált.) összegeket négyzetre emelve, osztva az elemek számával és levonva a .... korrekciós faktort a T-hatás négyzetösszege:

$$S_T = \frac{1}{10}(-1)^2 + 301^2 - 4500 = 4560$$

a szabadságfokok száma:

2 - 1

$$DF_T = \dots\dots\dots = 1$$

ezzel a variancia legjobb becslése:

$$s_T^2 = \frac{4560}{1} = 4560$$

b) <u>A rétegvastagság változtatása szerinti variancia számitása</u> (R hatás)

levonva

A sor (réteg vált.) összegeket négyzetre emelve, osztva az elemek számával és .... a korrekciós faktort, az R-hatás négyzetösszege lesz:

$$S_R = \frac{1}{10}(105^2 + 195^2) - 4500 = 405$$

a szabadságfokok száma:

2 - 1

$$DF_R = \dots\dots\dots = 1$$

ezzel a variancia:

$$s_R^2 = \frac{405}{1} = 405$$

c) <u>A T és R hatások interakciója okozta variancia számitása</u> (T x R hatás)

A négyzetösszegek számitásának gondolatmenete az előbbi, de itt a mintaösszegekkel számolunk és a korrekciós faktoron kivül az előbbi négyzetösszegeket is ...., az alábbi összefüggés szerint:

levonjuk

$$S_{TxR} = \frac{1}{n}(T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{21}^2 + T_{22}^2) - K - S_t - S_R =$$

$= \frac{1}{5}((-26)^2 + 131^2 + 25^2 + 170^2) - 4500 -$

$- 4560 - 405 = \dots\dots\dots\dots$ 7,4

d) A maradék hatások okozta variancia számitása (M hatás)

Először kiszámoljuk a teljes négyzetösszeget, azaz

$S_ö = \dots\dots\dots\dots\dots = 6596$ 11096 - 4500

A maradék variancia

$S_M = \dots\dots\dots\dots = 6596 - 4560 - 405 - 7,4 = 1623,6$ $= S_ö - S_T - S_R - S_{TxR} =$

$DF_ö = \dots\dots\dots = 19$ 20 - 1

$DF_M = \dots\dots\dots = 19 - 1 - 1 - 1 = 16$ $= DF_ö - DF_T - DF_R - DF_{TxR} =$

$s_M^2 = \dots\dots = \frac{1623,6}{16} =$ $= \frac{S_M}{DF_M}$

Ezután összeállitjuk a varianciaanalizis táblázatát.

A variancia forrása	Négyzetösszeg	Szabadsági fok (DF)	Variancia
T hatás	4560	1	4560
TxR hatás (interakció)	7,4	1	7,5
R hatás	405	1	405
Maradék	1623,6	16	101,5
Teljes	6596	19	95,9

Ha a két változtatás (T és R) kölcsönhatásának - interakciójának - lehetősége fennáll, minden esetben először az interakció által okozott varianciát kell, F-próba segitségével, a maradék varianciával összehasonlitani. Csak ha nincs szignifikáns eltérés, akkor vizsgálhatók az egyes hatások önállóan, egyébként a próbák félrevezető eredményt adnak. Tehát először a T x R hatást vizsgálva:

$$F_{sz} = \frac{s^2_{TxR}}{s^2_M} = \frac{7,4}{101,5} = 0,07$$

a két szabadságfok, számlálóé:

1 $DF_{TxR} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ nevezőé:

16 $DF_M = \ldots\ldots\ldots$

a kritikus érték $\alpha = 5\%$-os, egyoldali próbát alkalmazva:

$F_{krit} = 4,49 > F_{sz}$, tehát

nincs szignifikáns interakció.

Ebben az esetben az interakció és a maradék varianciája összevonható, mivel az interakció varianciája is a maradék variancia becslését adja. Ezzel táblázatunk a következővé módosul:

Varianciaforrás	Négyzet összeg	Szabadsági fok	Variancia
T-hatás	4560	1	4560
R-hatás	405	1	405
Maradék	1631	17	95,9
Teljes	6596	19	--

R-hatás szignifikancia vizsgálata	
$F_{sz} = \frac{s_R^2}{s_M^2} = \dots\dots\dots\dots\dots = 4,25$	$\frac{405}{95,9}$
$DF_R = \dots\dots\dots\dots$ és $DF_M = \dots\dots$-nél $\alpha = 5\%$-os egyoldali próbával $F_{krit} = 4,45 < F_{sz}$ tehát a rétegvastagság hatása …………………	1 17 nem szignifikáns
T-hatás szignifikancia vizsgálata	
$F_{sz} = \frac{s_T^2}{s_M^2} = \dots\dots\dots\dots\dots = 47,5$	$\frac{4560}{95,9}$
$DF_1 = \dots\dots$ és $DF_2 = \dots\dots\dots$-nél, $\alpha = 5\%$-os egyoldali próbával:	1 17
$F_{krit} = \dots\dots\dots \ll F_{sz}$, tehát a technológiai változtatás igen erősen szignifikáns hatásu.	= 4,45
A megoldást elemezve, a következőket állapithatjuk meg:	
- a technológiai változtatást……… a felületi fényességet jelentős mértékben megnöveli,	érdemes bevezetni
- bár a rétegvastagság változtatása nem mutatott ………………, a kritikus és a számitott érték kis különbsége arra utal, hogy a kérdést ………………elemszámmal érdemes tovább vizsgálni,	szignifikáns eltérést nagyobb minta
- a két változtatás között jelentős kölcsönhatást nem találtunk.	

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy vállalat aluminiumból készült nagynyomásu tartályokat gyárt. A tartályokat aluminium vonalhegesztővel erősitik össze. A hegesztett varrat szilárdsága kényes a hegesztési idő és a hegesztési áramerősség beállitására. A gépen dolgozó szakmunkás időnként ellenőrzi a helyes gépbeállitást. Az üzemi MEO naponta véletlenül megválasztott időpontokban 6 db próbahegesztést készit és három naponként a megrendelő megbizottjával együtt laboratóriumban szakitópróbát végez. Kérdés, hogy a három egymást követő napon vett minta átlagok között meglevő különbség tekinthető-e véletlennek?

A mért szakitószilárdság értékek kp-ban:

Minta / Próba	I.	II.	III.
1	310	325	330
2	335	330	350
3	270	330	380
4	300	350	355
5	305	350	315
6	335	295	330
Átlag	304	330	343

(α=0,05 szignifikancia szinten nincs különbség)

2. Izzólámpa gyártásnál a lámpafejek burához való hozzáragasztásához szükséges ragasztóanyag (fejelőkitt) egyik fontos töltőanyaga a mészkőliszt, amelyet a gyártó cég a kereskedelemből szerez be. Az egyes mészkőliszt szállitmányok átvételi vizsgálatának egyik szempontja a nedvességtartalom megállapitása. Minden szállitmányt, melyből személyenként 1-1 mintát vesznek, 4 személy vizsgál. Az átvételi labor vezetői a következő kérdésekre keresnek választ.

   a) A szállitó cég szállitmányonként ugyanolyan minőséget vagy eltérőt ad?

   b) Megállapitható-e valódi eltérés a vizsgálatot végző laboránsok adatai között?

A vizsgálathoz 4 laboráns 6 szállitmánynál végzett méréseinek adatait vették. Az adatokat, amelyek egy átlagos értékhez viszonyitott relativ mérőszámmal adottak, a következő táblázat tartalmazza:

Szállítmányok / Laboránsok	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I.	0,9	1,0	0,8	1,0	1,0	1,2
II.	1,1	1,1	0,6	1,2	0,9	1,0
III.	1,2	0,8	0,7	1,1	1,0	0,8
IV.	0,8	0,8	0,9	1,4	1,2	0,9

($\alpha = 0,05$ esetén a, b esetben egyaránt nincs eltérés.)

9. KORRELÁCIÓ-, REGRESSZIÓ-, TRENDSZÁMÍTÁS

Ha két változó között nincs funkcionális kapcsolat, hanem az egyik változó értékei a másik változó átlagos nagyságát határozzák meg, akkor a két változó között sztochasztikus kapcsolatról beszélünk.

A két változó közötti összefüggés szorosságát korreláció számitással, az összefüggés jellegét regresszió számitással határozzuk meg. Ha az idő a független változó, a számitásokat trendszámitásnak nevezzük.

A két változó közötti ok-okozat összefüggésre a matematikai statisztikai vizsgálat nem ad felvilágositást, azt minden esetben szakmai meggondolások alapján tárhatjuk csak fel. Trendszámitás esetén az idő, mint független változó általában nem oka a függő változó alakulásának, csupán vizsgálati közege.

A példatárban terjedelmi okok miatt elsősorban lineáris vagy lineárissá transzformálható kétváltozós korreláció-, regresszió-, trendszámitással foglalkozunk. Ezen vizsgálat során az alapgondolatok jól elsajátithatók, s továbbfejleszthetők az általában számitógéppel végzett többváltozós, illetve magasabb foku regresszió számitások felé.

A lineáris korrelációs együttható a következő:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} d_{y_i}^2}}\,,$$

ahol:

$$d_{x_i} = x_i - \bar{x}$$

$$d_{y_i} = y_i - \bar{y}\,.$$

Az $r_{x,y}$ szignifikancia vizsgálata közvetlenül a VIII. táblázat, vagy a következő összefüggés alapján, t-eloszlás segitségével végezhető el:

$$t = r_{x,y}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{x,y}^2}}$$

$$DF = n - 2$$

A regressziós egyenes alábbi formában felirt együtthatói a következőképpen határozhatók meg:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

A fejezetben használjuk még a rang módszereknél megismert kétváltozós rangkorrelációs együtthatót is.

Nyomatékosan felhivjuk a figyelmet arra, hogy a tárgyalt lineáris módszerek megismerése csupán alapja a korreláció-, regresszió-, trendszámitásnak, és ezért bonyolultabb problémák megoldására erőszakolt alkalmazása tévedésekhez vezethet.

FELADATOK

1. Bár a mezőgazdaság terméseredményét számos körülmény befolyásolja, (időjárás, növényvédelem, alkalmazott növényfajták stb.) nem vitatható, hogy a természeti és technikai tényezők közül a terméseredmények alakulásában legnagyobb szerepe a tápanyag utánpótlásnak, igy többek között a műtrágya felhasználásnak van. Vizsgáljuk meg ennek hatását a buza termésátlag növekedésére az alábbi kiinduló adatok

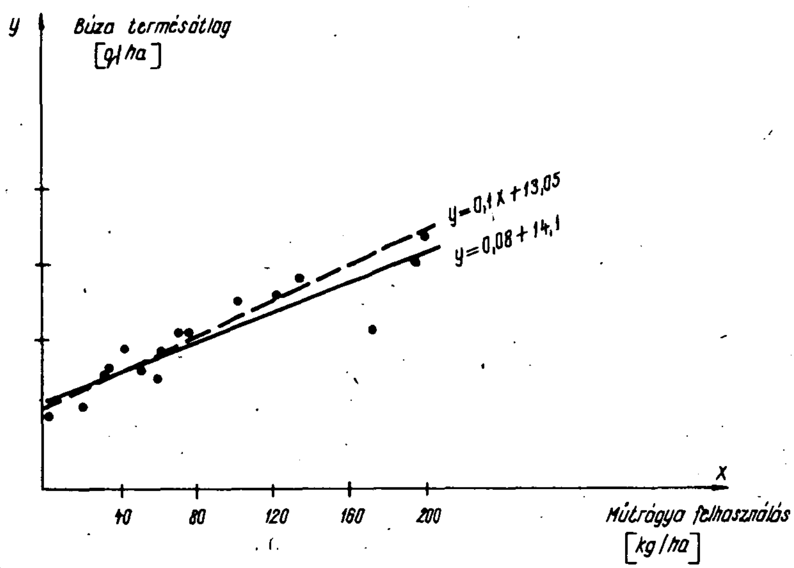
- az 1958-1971 közötti időszakban az 1 ha szántóterületre vonatkoztatott műtrágya felhasználás, valamint
- az 1958-1971. évi buza termés átlagok alapján (1. táblázat).

1. táblázat

Sorszám	Év	Műtrágya felhasználás kg/ha szántó x_i	Buza termés átlag q/ha y_i
1	1958	19,8	12,5
2	59	31,9	17,0
3	60	31,6	16,9
4	61	41,4	19,1
5	62	53,5	17,9
6	1963	58,7	15,6
7	64	67,2	18,6
8	65	70,4	21,7
9	66	76,3	21,7
10	67	101,3	25,9
11	1968	124,4	25,2
12	69	136,2	27,1
13	70	166,6	21,3
14	71	195,0	30,7

Megoldás

Részletesebb adatok hiányában fel kell tételezni, hogy a szántóföldi kulturákra a műtrágyát egyenletesen osztották el. Nemzetközi adatok alapján megállapitható, hogy a műtrágya felhasználás és a terméseredmények közötti összefüggés nem lineáris, magasabb műtrágyázási szinten, ahol a műtrágyázás hatékonysága fokozatosan csökken.



1. ábra
Termésátlag a műtrágyafelhasználás függvényében

lineáris

csökkenő

A vizsgált időszak (1958-1971) a termésátlagainak műtrágya felhasználás függvényében történő ábrázolása azonban azt mutatja, hogy a jelenlegi műtrágyázási szinten a .... összefüggés feltételezése még helytálló. A hosszabb távra tervezendő hatóanyag/ha szántóterület műtrágya felhasználásánál azonban már feltétlenül figyelembe kell venni a műtrágyázás .... hatékonyságát is, igy a műtrágya felhasználás és a termésátlag kapcsolata más összefüggéssel közelithető meg.

A szakmai meggondolás, valamint a pontdiagram vonulási tendenciája indokolja, hogy a jelenleg vizsgált tartományban az y és x közötti kapcsolatot

.... | $y = ax + b$

lineáris alakban fejezzük ki. Az együtthatók meghatározása előtt azonban ki kell számitanunk a lineáris .... együttható értékét, és el kell végeznünk .... vizsgálatát. A lineáris korrelációs együttható

korrelációs
szignifikancia

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_{y_i}^2}} .$$

ahol:

d_{x_i} = ... | $x_i - \bar{x}$

d_{y_i} = ... | $y_i - \bar{y}$

A szükséges számitásokat táblázatos formában végezzük el, amelyhez először .... és .... meghatározása szükséges.

$x ; y$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1174,3}{14} = 83,9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{291,2}{14} = 20,8$$

(2. táblázat)

2. táblázat

i	$d_{x_i} = x-\bar{x}$	$d_{y_i} = y-\bar{y}$	$d^2_{x_i}$	$d^2_{y_i}$	$d_{x_i} \cdot d_{y_i}$
1	- 64,1	- 8,3	4108,8	68,9	532,0
2	- 52,0	- 3,8	2704,0	14,4	197,6
3	- 52,3	- 3,9	2735,3	15,2	204,0
4	- 42,5	- 1,7	1806,2	2,9	72,2
5	- 30,4	- 2,9	924,2	8,4	88,2
6	- 25,2	- 5,2	635,0	27,0	131,0
7	- 16,7	- 2,2	278,9	4,8	36,7
8	- 13,5	0,9	182,2	0,8	-12,1
9	- 7,6	0,9	57,8	0,8	- 6,8
10	17,4	5,1	302,8	26,0	88,7
11	40,5	4,4	1640,2	19,4	178,2
12	52,3	6,3	2735,3	39,7	329,5
13	82,7	0,5	6839,3	0,2	41,3
14	111,1	9,9	12343,2	98,0	1099,9
$\sum_{i=1}^{n}$			37293,2	326,5	2980,4

Helyettesitsük be tehát a kiszámitott értékeket:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2_{x_i} \sum_{i=1}^{n} d^2_{y_i}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$= 0,85$

$$\frac{2980,4}{\sqrt{37293,2 . 325,5}}$$

Végezzük el a lineáris korrelációs együttható .... vizsgálatát!

szignifikancia

A $\varrho_{x,y} = 0$ .... a — nullhipotézist

$$t_{sz} = r_{x,y}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{x,y}^2}}$$

próbastatisztika alapján vizsgálhatjuk, ahol a szabadsági fok: DF = ... — n - 2

Szignifikancia szintként α = 5%-ot választunk.

$$t_{sz} = r_{x,y}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{x,y}^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 5{,}56$$ — $0{,}85\sqrt{\frac{14-2}{1-0{,}85^2}}$

DF = n - 2 = ... = 12 — 14 - 2

t_{krit} = ... — 2,17

t_{sz} ...... t_{krit} — >

H_0: .... — nem igaz

A két változó között korrelációs kapcsolat .... — van.

A fentiek figyelembevételével meghatározhatjuk az .... paramétereit. — egyenes

Az a és b értékek a következőképpen számolhatók:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2} = \ldots\ldots\ldots = 0{,}08$$ — $\frac{2980{,}4}{37293{,}2}$

$b = \bar{y} - a\bar{x}$ = ... = 14,1 — 20,8-0,08.83,9

A regressziós egyenes egyenlete tehát:

.... — y= 0,08 x + 14,1

$r^2_{x,y}$; $0,85^2$

72%-ban

eltérő

88%-ban

mütrágyázás nélküli

többlet buzatermés

Határozzuk meg a determinációs index értékét is:

$d_{x,y}$ = ...= .... = 0,72

Ami azt jelenti, hogy termésátlagok változásában a mütrágya felhasználás .... játszott szerepet. Az egyenest az 1. ábrán rajzoltuk fel.

A pontdiagram felvételénél azonban megfigyelhető, hogy a 13. sz. 1970-es évi mütrágya felhasználás és buza termés átlag a többi pont vonulási irányától nagymértékben .... értéket jelöl. Ennek oka az 1970-es árviz, ami kétségtelenül kihatott a terméseredményre. Ennek az évnek a figyelmen kivül hagyásával a fenti számitást megismételve a regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 0,1x + 13,05$$

A korrelációs együttható értéke:

$$r = 0,94 \qquad r^2 = 0,88$$

Amely szerint y érték változásában az x értéke .... játszik szerepet. Az igy meghatározott egyenest szintén az 1. ábrában tüntettük fel. A regressziós egyenlet konstans tényezője a talaj .... termőképességét fejezi ki, mig ax szorzat értéke az 1 kg mütrágya hatására bekövetkező .... mennyiségét mutatja meg.

2. Egy mezőgazdasági kutató intézet különböző területeken megmérte egy nagy vizfogyasztásu kulturnövénynek, az uborkának, a vizfelvételét és egy-

idejüleg a levegő relativ páratartalmát. 20 mérést végeztek, amelynek eredményeit a következő táblázat tartalmazza. A vizfelvételt fejlett növényi egyedeknél mérték, és a kapott eredményeket cm^3/négyszögöl, nap értékre transzformálták (3. táblázat).

A levegő relativ páratartalma %-ban	Vizfogyasztás cm^3/nap
80	1 267
68	1 252
61	1 824
50	2 108
47	2 295
57	2 154
74	2 119
61	2 987
71	1 310
58	1 601
50	2 566
56	2 972
72	1 936
63	2 001
59	2 106
62	2 817
91	1 177
65	2 037
44	2 616
48	2 862

Határozzuk meg a lineáris korrelációs együtthatót és végezzük el szignifikanciájának vizsgálatát. Lineáris közelités elfogadása esetén határozzuk meg a regressziós egyenest, és ábrázoljuk diagramban, amely alapján egy mezőgazdasági üzem öntözőmestere a levegő relativ nedvességtartalmának ismeretében meghatározhatja az egy négyszögölre locsolandó viz mennyiségét, és igy az öntözőrendszer müködtetési idejét.

Megoldás

Először számitsuk ki a kapcsolat szorosságára jellemző .... korrelációs együtthatót. A számitást a táblázat alapján végezzük (4. táblázat, lásd következő oldal)

lineáris

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = ... = 62,1$$

$\frac{1242}{20}$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = ... = 2100,3$$

$\frac{42007}{20}$

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} \cdot d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_{y_i}^2}} = ... =$$

$\frac{-85783,70}{\sqrt{2501,80 \cdot 6421562,60}}$

$= -0,677$

A korrelációs együttható negativ előjele azt jelenti, hogy a változók között .... van, azaz x növekvő értékeihez y .... értékei tartoznak. Az együttható abszolut értéke ....korrelációt mutat.

negativ korreláció
csökkenő

közepesen szoros

4. táblázat

Mérés sor-száma i	A levegő relativ páratartalma %-ban x_i	Vizfogyasztás cm^3/nap y_i	d_{x_i}	d_{y_i}	$d_{x_i}^2$	$d_{y_i}^2$	$d_{x_i} \cdot d_{y_i}$
1	80	1 267	+ 17,9	- 833,3	320,1	694 388,89	- 14 916,07
2	68	1 252	+ 5,9	- 848,3	34,81	719 612,89	- 5 004,97
3	61	1 824	- 1,1	- 276,3	1,21	76 341,69	+ 303,93
4	50	2 108	- 12,1	+ 7,7	146,41	59,29	- 93,17
5	47	2 295	- 15,1	+ 194,7	228,01	37 908,09	- 2 939,97
6	57	2 154	- 5,1	+ 53,7	26,01	2 883,69	- 273,87
7	74	2 119	+ 11,9	+ 18,7	141,61	349,69	+ 222,53
8	61	2 987	- 1,1	+ 886,7	1,21	786 236,89	- 975,37
9	71	1 310	+ 8,9	- 790,3	79,21	624 574,09	- 7 033,67
10	58	1 601	- 4,1	- 499,3	16,81	249 300,49	+ 2 047,13
11	50	2 566	- 12,1	+ 465,7	146,41	216 876,49	- 5 634,97
12	56	2 972	- 6,1	+ 871,7	37,21	759 860,89	- 5 317,37
13	72	1 936	+ 9,9	- 164,3	98,01	26 994,49	- 1 626,57
14	63	2 001	+ 0,9	- 99,3	0,81	9 860,49	- 89,37
15	59	2 106	- 3,1	+ 5,7	9,61	32,49	- 17,67
16	62	2 817	- 0,1	+ 716,7	0,01	513 658,89	- 71,67
17	91	1 177	+ 28,9	- 923,3	835,21	852 482,89	- 26 683,37
18	65	2 037	+ 2,9	- 63,3	8,41	4 006,89	- 183,57
19	49	2 616	- 13,1	+ 515,7	171,61	265 946,49	- 6 755,67
20	48	2 862	- 14,1	+ 761,7	198,81	580 186,89	- 10 739,97
$\sum_{i=1}^{n}$	1 242	42 007			2 501,80	6 421 562,60	- 85 783,70

szignifikancia t-próba	Végezzük el a lineáris korrelációs együttható .... vizsgálatát .... segitségével. Szakmai hipotézisünk szerint az uborka vizfelvétele .... a levegő relativ páratartalmától. A nullhipotézist ennek .... állitjuk fel, azaz a korrelációs együttható csupán a .... következményeként vette fel a kiszámitott értéket.
függ ellentettjeként véletlen	
$\varrho_{x,y} = 0$	H_o: ....
	A szignifikancia szintet $\alpha = 5\%$-nak választjuk. A próba a
	$$t_{sz} = r_{x,y}\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2_{x,y}}}$$
$n - 2$ t-eloszlást	mennyiség segitségével végezhető el, amely DF = ... szabadságfoku .... követ.
$-0,677\sqrt{\frac{20-2}{1-0,677^2}}$	t_{sz} = ... = -3,90
$20 - 2$	DF = n - 2 = ... = 18
	$t_{krit} = -2,1$
$<$	t_{sz} ..... t_{krit}
korrelációs kapcsolat	A nullhipotézis tehát nem igaz, a két változó között .... van.
	Megkereshetjük a t-eloszlás táblázatából, hogy milyen valószinüséggel fordul elő a fenti korrelációs együtthatónál abszolut értékben nagyobb vagy megegyező érték. A táblázat alapján ez kb. 1‰.
	A determinációs index
$r^2_{x,y}$	$d_{x,y}$ = ... = 0,458
	A locsolandó viz mennyiségének becslésé-

hez azonban meg kell határoznunk az összefüggés .... is. A .... vizsgálat alapján elfogadva a lineáris kapcsolat létezését az összefüggést a következő alakban keressük.

$$y = ax + b$$

Határozzuk meg a táblázat adatainak a felhasználásával az egyenes .... értékét.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} \cdot d_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = -34{,}28$$

$$b = \ldots\ldots\ldots = 2\,100{,}35 - (34{,}28)62{,}1 =$$

$$= 4\,229$$

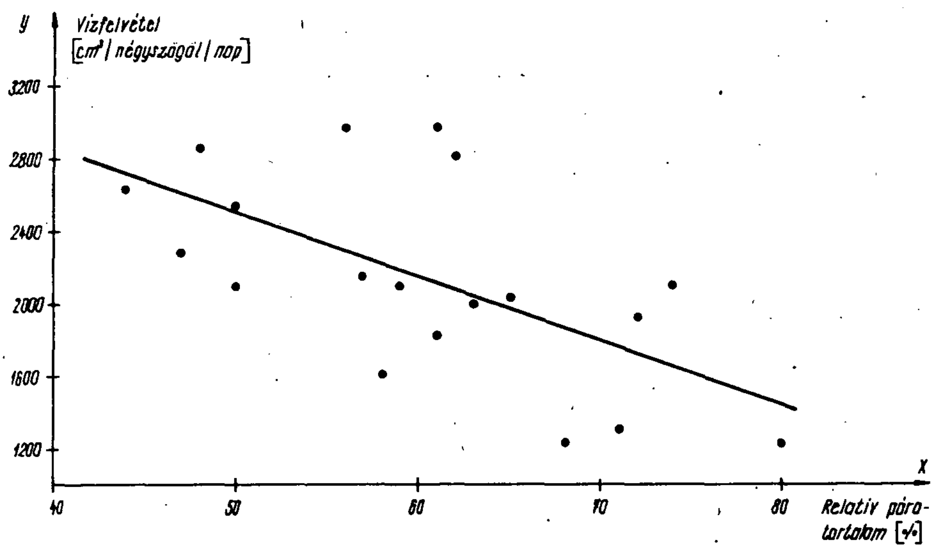
egyenletét

szignifikancia

paramétereinek

$$\frac{-85\,783{,}70}{2\,501{,}80}$$

$$\bar{y} - a\bar{x}$$



2. ábra
Vizfelvétel a relativ páratartalom függvényében

Az egyenes egyenlete tehát

$$y = 4\,229 - 34,28x$$

A fenti egyenest a mért pontokkal együtt a 2. ábrában rajzoljuk fel. A diagram alapján becsülhető az öntözendő vizmennyiség. Az öntözendő vizmennyiségnek mintegy 30%-kal többnek kell lennie az uborka által felvett vizmennyiségnél, mert kb. 30% csurgalék viz formájában az altalajba kerül, illetve elpárolog. Természetesen a vizfelvételt nem csupán a levegő relativ páratartalma befolyásolja, hanem még számos más tényező, amelyeket ebben a feladatban nem vizsgáltunk.

3. Egy csecsemőnadrágokat gyártó vállalat termelési tervének összeállitásához fel szeretné mérni a csecsemőnadrágok keresletének várható alakulását. A vizsgálathoz hat év adatai állnak rendelkezésre (5. táblázat).

5. táblázat

Évek sorszáma	Élveszületések száma (ezer fő)	Csecsemőnadrág forgalom (ezer db.)
1	132	2 363
2	133	2 577
3	138	2 804
4	148	3 002
5	154	3 286
6	160	3 636

Határozzuk meg a csecsemőnadrágok várható keresletét az n+1 -ik évben, ha az élveszületések várható értéke az n+1 -ik évben 165 ezer csecsemő lesz!

Megoldás

Tekintettel arra, hogy a csecsemőnadrágokat a 0-2 éves koru gyermekek használják, a csecsemőnadrágok forgalmát a .... koru gyermekek számának függvényében célszerü megvizsgálni. A 0-2 éves koru gyermekek átlagos számát az élveszületések számából a következőképpen tudjuk meghatározni.

$$y_i = x_i + x_{i-1}$$

y_i-vel jelöltük a 0-2 éves gyermekek számát és x_i-vel az adott évben született gyermekek számát. Mint látjuk, egy meghatározott évben született gyermekek száma .... az ugyanabban az évben 0-2 éves koru gyermekek számát. Igy az élveszületések száma és a 0-2 éves koru gyermekek száma között is .... kapcsolatról beszélhetünk. Ha ez a kapcsolat ...., akkor elegendő csupán az élveszületések száma és a csecsemőnadrág forgalom közötti összefüggést tanulmányozni.

Nézzük meg tehát az évenkénti élveszületések száma és a 0-2 éves koru gyermekek száma közötti kapcsolat ...., és határozzuk meg az összefüggés jellegét. A számitást táblázatos formában végezzük (6. táblázat).

0-2 éves

nem határozza meg

korrelációs

szoros

szorosságát

6. táblázat

i	x_i ezer fő	y_i ezer fő	d_{x_i}	d_{y_i}	$d^2_{x_i}$	$d^2_{y_i}$	$d_{x_i} \cdot d_{y_i}$
1	132	262	-12,16	-21,33	147,86	454,96	259,37
2	133	265	-11,16	-18,33	124,54	335,98	204,56
3	138	271	- 6,16	-12,33	37,94	152,02	75,95
4	148	286	3,84	2,67	14,74	7,12	10,25
5	154	302	18,67	18,67	96,82	348,56	183,71
6	160	314	15,84	30,67	250,90	940,64	485,81
$\sum_{i=1}^{6}$	865	1 700			672,80	2 239,28	1 219,65

$\frac{865}{6}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \ldots\ldots = 144,16$$

$\frac{1700}{6}$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = \ldots\ldots = 283,33$$

$\frac{1219,65}{\sqrt{672,80 . 2239,28}}$

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{x_i} . d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 . \sum_{i=1}^{n} d_{y_i}^2}} = \ldots\ldots\ldots =$$

$= 0,993$

$\varrho_{x,y} = 0$

$H_o : \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\alpha = 1\%$

$n - 2 = 6 - 2$

$DF = \ldots\ldots = \ldots\ldots = 4$

$0,917$

$r_{krit} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$<$

$r_{krit} \ldots\ldots \; r_{x,y}$

nem igaz

$H_o : \ldots\ldots\ldots\ldots$

szoros

Az adott évben élő 0-2 éves koru gyermekek száma .... korrelációs kapcsolatban van az adott évben született csecsemők számával. Ez egyébként természetes is, hiszen a 0-2 éves koru gyermekek száma csupán az előző évben születettek számától függ még. Az élveszületések száma pedig egyik évről a másikra általában nem változik jelentős mértékben.

Igy a csecsemőnadrág forgalmát tetszésünk szerint vizsgálhatjuk, vagy a .... számának, vagy pedig az .... számának függvényében. Először nézzük meg az eredetileg tervezett összefüggést a 0-2 éves gyermekek száma és a csecsemőnadrág forgalom között. Jelöljük a forgalom egyes értékeit z_i-vel (7. táblázat)

0-2 éves gyerekek
élve születések

7. táblázat

i	y_i ezer fő	z_i ezer db	d_{y_i}	d_{z_i}	$d^2_{y_i}$	$d^2_{z_i}.10^{-3}$	$d_{y_i}.d_{z_i}$
1	262	2 363	-21,33	-581,66	454,96	338,328	12 406,80
2	265	2 577	-18,33	-367,66	335,98	135,173	6 739,20
3	271	2 804	-12,33	-140,66	152,02	19,785	1 734,33
4	286	3 002	2,67	57,34	7,12	3,287	153,09
5	302	3 286	18,67	341,34	348,56	116,512	6 372,21
6	314	3 636	30,67	691,34	940,64	477,950	21 203,39
$\sum_{i=1}^{6}$	1 700	17 668			2239,28	1 091,035	48 609,62

$\bar{y} = 283,33$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} z_i}{6} = \ldots\ldots\ldots = 2\,944,66$$

$$\frac{17\,668}{6}$$

A lineáris korrelációs együttható számítása a táblázat adatai alapján:

$$r_{y,z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{y_i} \cdot d_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6} d^2_{y_i} \cdot \sum_{i=1}^{6} d^2_{z_i}}} = \ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{48609,62}{\sqrt{2239,28.1091035}}$$

$= 0,983$

$\varrho_{y,z} = 0$

n-2 = 6-2

0,917

<

szoros
egyenes

$\frac{48\,609{,}62}{2\,239{,}28}$

$\bar{z} - a\bar{y}$

z = 21,70y - 3 203,60

160 + 165 = 325

21,70.325 - 3 203,60

3 848,9

H_o: ....

$\alpha = 1\%$

DF = ... = ... = 4

r_{krit} = ...

r_{krit} ...... $r_{y,z}$

H_o : nem igaz.

A 0-2 éves koru gyermekek száma és a csecsemőnadrág forgalom között .... korrelációs kapcsolat van. Határozzuk meg az .... paramétereit.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{y_i} \cdot d_{z_i}}{\sum_{i=1}^{6} d_{y_i}^2} = \ldots\ldots\ldots = 21{,}70$$

b = ... = 2 944,66 - 21,70.283,33 =

= - 3 203,60

Tehát az egyenes egyenlete

....

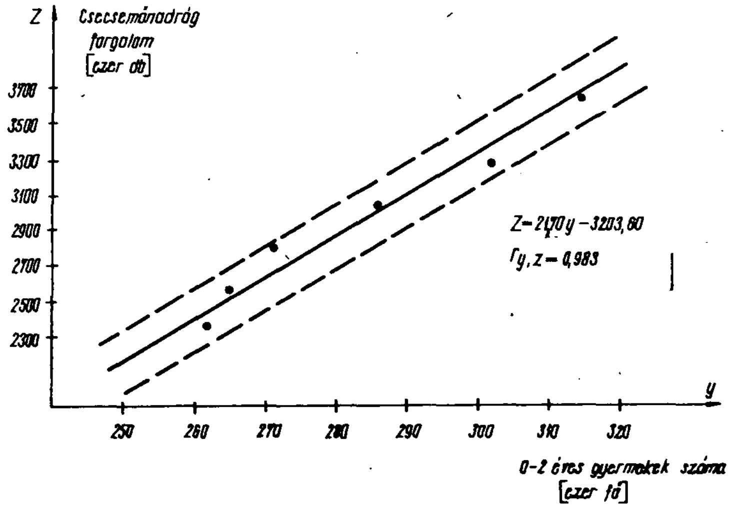
amely alapján becsülhetjük az n+1 -ik évben jelentkező keresletet. A várható élveszületések száma 165 ezer.

y_{n+1} = ... =

z_{n+1} = ... = 3 848,90

A várható kereslet az n+1-ik évben tehát .... ezer db. csecsemőnadrág lesz.

Adatainkat és a meghatározott egyenest a 3. ábrában rajzoltuk fel.



3. ábra
Csecsemőnadrág forgalom a 0-2 éves koru gyermekek számának függvényében

Vizsgáljuk most a csecsemőnadrág forgalmat az élveszületések számának függvényében (8. táblázat).

8. táblázat

i	x_i	z_i	d_{x_i}	d_{z_i}	$d^2_{x_i}$	$d^2_{z_i} \cdot 10^{-3}$	$d_{x_i} \cdot d_{z_i}$
1	132	2 363	-12,16	-581,66	147,86	338,328	7 072,98
2	133	2 577	-11,16	367,66	124,54	135,173	4 103,08
3	138	2 804	- 6,16	-140,66	37,94	19,785	866,46
4	148	3 002	3,84	57,34	14,74	3,287	220,18
5	154	3 286	9,84	341,34	96,82	116,512	3 358,78
6	160	3 636	15,84	691,34	250,90	477,950	10 950,82
$\sum_{i=1}^{6}$	865	17 668			672,80	1 091,035	26 572,30

$$r_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{x_i} \cdot d_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6} d_{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{6} d_{z_i}^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= 0{,}980$$

H_o: ....

$\alpha = 1\%$

$DF = n - 2 = 4$

$r_{krit} = 0{,}917$

$r_{krit} < r_{x,z}$

H_o: ....

Az élveszületések száma és a csecsemőnadrág forgalom között .... korrelációs kapcsolat van. Az előzőekben megállapitott $r_{y,z}$ korrelációs együtthatótól csupán 3%o-kel tér el.

Állapitsuk meg az egyenes paramétereit.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{x_i} \cdot d_{z_i}}{\sum_{i=1}^{6} d_{x_i}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= 39{,}49$$

$b = \bar{z} - a\bar{x} = 2\,944{,}66 - 39{,}49 \cdot 144{,}16 =$

$= -\,2\,748{,}20$

Az egyenes egyenlete:

....

$$\frac{26\,572{,}30}{\sqrt{672{,}80 \cdot 1091\,035}}$$

$\varrho_{x,z} = 0$

nem igaz

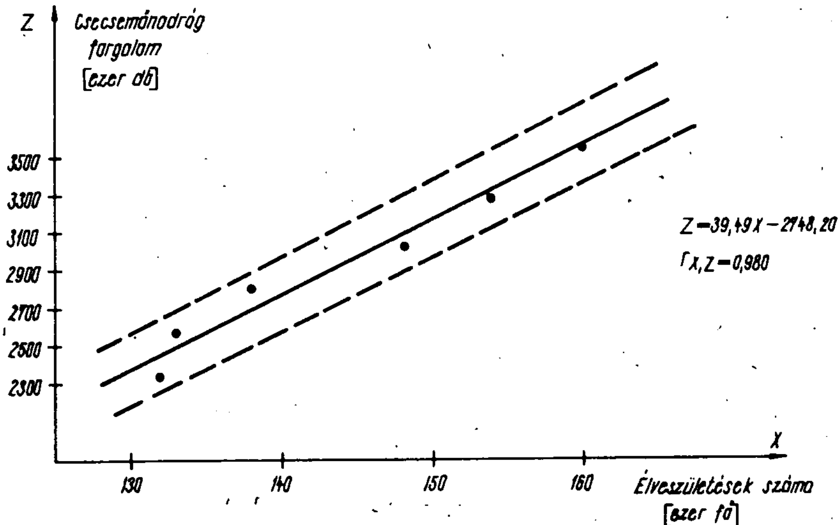
szoros

$$\frac{26\,572{,}30}{672{,}80}$$

$z = 39{,}49x - 2\,748{,}2$

Becsüljük meg ezen egyenes alapján az n+1 -ik évben jelentkező keresletet.

z_{n+1} =....................... = 3 767,6 | 39,49.165-2748,2



4. ábra
Csecsemőnadrág forgalom az élveszületések száma függvényében

9. táblázat

i	u_i	z_i	d_{u_i}	d_{z_i}	$d^2_{u_i}$	$d^2_{z_i} \cdot 10^{-3}$	$d_{u_i} \cdot d_{z_i}$
1	1	2 363	-2,5	-581,66	6,255	338,328	1 454,15
2	2	2 577	-1,5	-367,66	2,25	135,173	551,49
3	3	2 804	-0,5	-140,66	0,25	19,785	70,33
4	4	3 002	0,5	57,34	0,25	3,287	28,67
5	5	3 286	1,5	341,34	2,25	116,512	512,01
6	6	3 636	2,5	691,34	6,25	477,950	1 728,35
$\sum_{i=1}^{n}$	21	17 668			17,50	1 091,035	4 345,00

Az n+1 -ik évben tehát az élveszületések alapján becsülve .... ezer db. csecsemőnadrág kereslet várható. Az adatokat és a meghatározott | 3 767,6

$\frac{21}{6}$

$\frac{4\ 435}{\sqrt{17,50.1091\ 035}}$

$\rho_{u,z} = 0$

6

0,917

nem igaz

egyenes

$\frac{4\ 345}{17,50}$

2944,66-248,28.3,5

egyenest a 4. ábrán rajzoltuk fel. Végül becsüljük trendszámitással az n+1 -ik évben jelentkező keresletet (9. táblázat).

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{6} u_i}{6} = \ldots\ldots\ldots = 3,5$$

$$r_{u,z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{u_i} \cdot d_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6} d_{u_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{6} d_{z_i}^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = $$

$= 0,994$

H_o : ....

$\alpha = 1\%$

DF = ...

r_{krit} = ...

$r_{krit} < r_{u,z}$

H_o : ....

Az évek száma, azaz az idő és a csecsemőnadrág forgalom között szoros korreláció mutatkozik. Igy meghatározhatjuk az .... egyenletét.

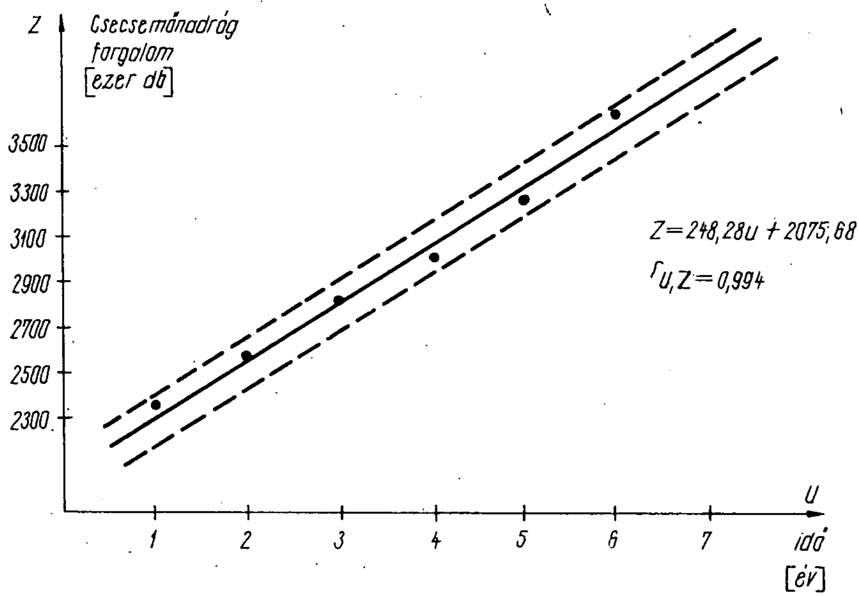
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{u_i} \cdot d_{z_i}}{\sum_{i=1}^{6} d_{u_i}^2} = \ldots\ldots\ldots = 248,28$$

$b = \bar{z} - a\bar{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2\ 075,68$

$z = 248,28u + 2\,075,68$

Becsüljük meg ezen összefüggés alapján az n+1 -ik évben várható keresletet.

$z_{n+1} = 248,28.7 + 2\,075,68 = 3\,813,6$



5. ábra
A csecsemőnadrág forgalom trendje

Az n+1 -ik évben várható kereslet 3 813,6 ezer db csecsemőnadrág. Ezeket az adatokat az 5. ábrán ábrázoltuk.

Határozzuk meg mindhárom esetben a becsérték becsült szórását és az egyenes konfidencia intervallumát.

$$S_{z,y} = S_z\sqrt{1-r^2_{y,z}} = \sqrt{\frac{1091\,035}{4}(1-0,983^2)} =$$

$$= 96,3$$

	$$S_{z,x} = S_z\sqrt{1-r_{x,z}^2} = \sqrt{\frac{1091035}{4}(1-0{,}983)^2} =$$ $$= 104{,}4$$ $$S_{z,u} = S_z\sqrt{1-r_{u,z}^2} = \sqrt{\frac{1091035}{4}(1-0{,}994^2)} =$$ $$= 57{,}2$$ Az ábrákba berajzoltuk a 95%-os szignifikancia szinthez tartozó konfidencia intervallumokat. Számitásaink alapján azt mondhatjuk, hogy a legpontosabb becslést
trendszámitás	jelen esetben a .... alapján (év - csecsemőnadrág közötti kapcsolat) adhatjuk. Még igy is, ha feltételezzük a linearitás érvényességét a következő évben a várható kereslet 95% valószinüséggel
112,1	3 813,6 ± .... ezer db. intervallumban helyezkedik el, ami sajnos nem tekinthető tulzottan pontos becslésnek.

4. Vizsgáljuk meg a lakossági gázfogyasztás alakulását a hőmérséklet függvényében egy magyarországi gázátadó állomáson! A rendelkezésre álló adatok a következők (10. táblázat, l. köv. oldal).

Megoldás

A közölt adatok birtokában meg tudjuk vizsgálni a napi átlagos hőmérséklet és a napi gázfogyasztás közötti összefüggést, valamint a havi átlagos hőmérséklet és a havi átlagfogyasztás közötti összefüggést. Természetesen a gázfogyasztást számos más tényező is befolyásolja, pl. a szélviszonyok, de feltehető, hogy a

10. táblázat

Egy gázátadó állomás napi fogyasztásának és a napi átlaghőmérsékletnek az alakulása 1971-ben

Napok	Január		Február		Március	
	Gázfogy. Q m³	Napi átl. hőm. °C	Q m³	t °C	Q m³	t °C
1.	5 850	-3,4	6 330	2,3	7 280	-3,4
2.	7 070	-5,4	6 670	0,6	7 200	-3,0
3.	7 810	-6,2	6 750	-1,5	7 100	-3,4
4.	7 790	-7,4	6 340	0,7	7 450	-5,7
5.	8 010	-3,4	5 990	1,9	8 260	-8,1
6.	7 280	-3,4	5 990	1,9	7 970	-6,3
7.	6 990	-3,4	5 730	2,4	7 570	-3,7
8.	7 300	-5,8	6 010	2,8	6 870	-2,7
9.	7 250	-6,0	5 630	4,1	7 100	-3,0
10.	7 670	-6,6	5 190	4,0	6 700	-0,3
11.	7 110	-7,3	5 800	0,3	6 870	-0,7
12.	7 570	-5,1	5 540	-1,1	6 800	-1,8
13.	7 520	-8,3	5 730	2,5	5 560	-0,9
14.	7 720	-7,2	4 880	4,4	6 610	2,5
15.	7 080	-3,2	6 760	3,7	5 480	4,1
16.	7 230	-3,7	5 430	3,9	5 400	2,5
17.	6 660	-2,0	7 840	2,9	4 500	4,4
18.	6 860	-2,4	7 200	4,5	4 500	6,4
19.	6 570	-2,9	6 270	4,6	3 550	12,2
20.	6 580	-0,8	6 250	3,1	3 150	13,9
21.	6 090	0,8	5 890	3,3	2 620	11,8
22.	5 020	1,4	6 860	0,6	3 030	9,2
23.	5 370	1,7	6 709	4,1	4 700	5,0
24.	5 570	3,8	6 910	3,1	4 240	4,0
25.	5 120	2,8	6 970	2,4	3 930	4,2
26.	5 640	1,5	7 000	1,3	4 210	4,9
27.	5 400	3,6	7 080	-3,8	4 130	6,4
28.	7 680	3,8	7 400	-3,5	3 650	7,4
29.	6 420	1,2			4 010	7,0
30.	7 100	-0,3			4 730	6,0
31.	6 480	1,8			4 590	8,2

Napok	Április Q m³	Április t °C	Május Q m³	Május t °C	Junius Q m³	Junius t °C
1.	2 900	8,8	2 320	11,0	660	18,2
2.	3 150	10,9	2 070	11,2	680	20,1
3.	3 610	8,3	2 590	11,3	700	20,8
4.	2 840	13,1	1 940	12,6	826	19,0
5.	2 620	11,8	1 880	12,3	830	19,7
6.	2 460	10,1	1 640	14,1	830	21,4
7.	2 350	12,4	1 460	13,9	830	12,2
8.	1 640	11,6	1 550	13,9	830	19,0
9.	1 820	14,5	1 360	15,7	826	19,0
10.	1 720	12,6	1 200	16,5	826	20,8
11.	1 730	12,9	890	20,3	826	20,4
12.	2 020	10,6	870	19,2	826	16,1
13.	2 720	11,3	830	20,0	826	16,8
14.	3 000	9,9	840	19,8	826	17,0
15.	3 030	6,4	810	20,2	826	22,0
16.	2 350	8,9	750	20,7	830	17,4
17.	2 370	13,6	650	22,2	830	17,4
18.	2 100	11,6	650	21,3	830	15,7
19.	2 050	11,2	620	22,6	826	15,6
20.	1 180	12,6	620	22,5	826	15,5
21.	1 540	11,7	540	23,0	830	17,1
22.	1 490	12,7	610	21,1	860	18,7
23.	1 420	16,9	240	18,4	500	19,4
24.	1 770	15,3	660	18,8	600	19,2
25.	2 160	12,6	630	20,0	580	18,2
26.	2 500	10,2	555	20,9	590	18,5
27.	1 890	13,4	620	19,2	650	19,7
28.	3 340	11,2	620	16,3	558	20,2
29.	2 370	9,3	690	17,6	620	18,0
30.	2 570	10,1	740	18,0	658	16,5
31.			640	18,5		

Napok	Julius		Augusztus		Szeptember	
	Q m^3	t ^oc	Q m^3	t ^oC	Q m^3	t ^oC
1.	734	14,2	790	24,6	1 125	18,4
2.	1 010	16,1	611	24,5	610	19,1
3.	755	17,9	2 075	25,1	740	19,8
4.	855	18,3	3 359	25,0	970	16,5
5.	590	21,0	3 554	24,7	570	18,5
6.	607	21,2	679	25,6	1 020	17,7
7.	540	22,2	560	26,9	1 990	15,2
8.	530	22,8	487	25,0	1 530	13,2
9.	510	21,0	670	21,6	2 200	11,6
10.	460	23,9	610	20,5	2 180	13,2
11.	540	23,7	680	21,1	2 290	13,1
12.	440	23,7	1 960	21,1	1 480	13,7
13.	492	24,2	1 650	21,2	1 340	14,3
14.	484	21,5	1 280	21,3	2 990	14,7
15.	740	20,3	1 020	23,9	3 480	12,4
16.	1 670	22,3	2 084	24,6	4 510	12,1
17.	1 270	22,8	1 500	22;3	5 000	10,4
18.	580	21,3	830	20,0	3 310	11,5
19.	1 530	19,0	590	20,9	3 360	11,4
20.	2 590	20,0	670	22,9	3 640	12,1
21.	1 097	19,0	470	21,9	3 251	13,1
22.	2 780	19,2	550	22,7	1.770	12,6
23.	2 170	18,4	600	22,7	3 170	14,5
24.	680	20,1	555	20,6	3 060	13,2
25.	480	21,4	2 290	17,2	2 150	13,3
26.	2 390	21,7	1 940	18,0	1 530	16,1
27.	3 810	22,0	1 350	18,5	3 640	15,0
28.	2 660	24,3	1 170	19,5	2 450	14,8
29.	1 800	24,7	640	19,0	3 210	14,3
30.	3 740	23,2	1 520	20,5	3 170	14,4
31.	690	22,9	1 820	18,4		

10. táblázat folytatása

Napok	Október		November		December	
	Q m^3	t ^oC	Q m^3	t ^oC	Q m^3	t ^oC
1.	3 380	14,9	6 680	6,1	10 080	2,2
2.	3 620	12,6	8 770	8,5	9 020	3,3
3.	2 750	13,0	7 820	8,8	9 140	3,7
4.	2 710	13,4	7 960	9,6	9 930	3,7
5.	5 890	10,7	7 580	7,1	9 900	3,0
6.	5 980	9,5	7 270	10,5	9 360	6,9
7.	6 350	8,6	4 890	11,2	6 320	6,0
8.	5 130	12,5	4 970	8,6	9 720	4,7
9.	5 240	10,3	6 180	13,8	10 600	-1,0
10.	2 970	11,7	5 670	10,4	4 480	-1,7
11.	4 730	12,3	5 260	10,3	10 200	1,9
12.	4 820	11,4	6 470	8,5	9 920	3,8
13.	5 450	11,3	6 100	6,8	9 480	5,7
14.	4 460	14,9	5 780	7,0	10 000	3,5
15.	5 720	9,5	5 340	7,1	9 750	3,6
16.	6 590	6,8	6 300	6,7	9 730	5,8
17.	5 320	3,2	8 060	5,4	9 600	6,1
18.	5 730	5,5	7 740	8,3	9 200	1,7
19.	5 150	7,5	7 380	10,7	10 380	-1,4
20.	5 370	7,1	9 040	1,9	10 380	-0,3
21.	5 700	10,3	9 100	-0,8	10 100	2,9
22.	6 100	12,0	9 510	-1,8	8 590	6,8
23.	4 950	13,7	10 250	-0,6	9 160	4,8
24.	3 650	11,1	10 320	-2,8	8 240	5,2
25.	3 360	9,6	10 500	-6,0	7 480	2,6
26.	4 780	12,0	10 450	-0,7	8 870	0,9
27.	7 060	8,2	12 000	1,2	11 240	-0,4
28.	7 980	2,8	9 360	-0,6	14 640	-1,0
29.	8 290	1,5	8 990	1,6	13 330	-0,6
30.	8 660	2,9	10 020	1,8	13 010	0,6
31.	6 880	0,9			12 260	0,2

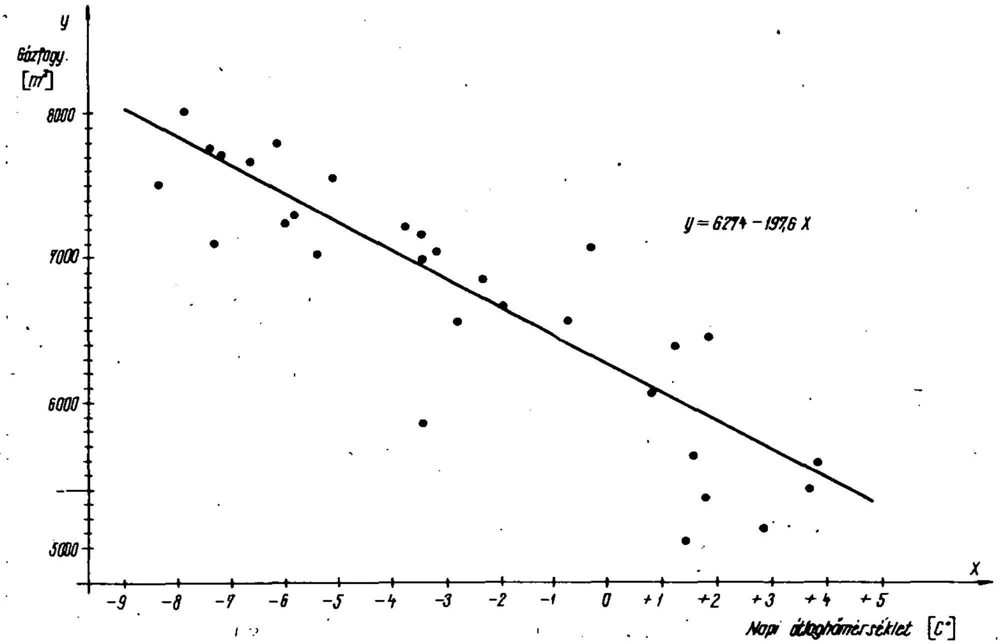
11. táblázat

Nap (január) i	x_i (t ; °C)	y_i (Q ; m^3)	d_{x_i}	d_{y_i}	$d^2_{x_i}$	$d^2_{y_i}$	$d_{x_i} \cdot d_{y_i}$
1.	-3,4	5 850	-0,9	- 918	11,56	3 422.10^4	822
2.	-5,4	7 070	-2,9	302	29,16	4 998.10^4	- 876
3.	-6,2	7 810	-3,7	1 042	38,44	6 100.10^4	-5 106
4.	-7,4	7 790	-4,9	1 022	54,76	6 068.10^4	-5 008
5.	-7,7	8 010	-5,2	1 242	59,29	6 416.10^4	-6 458
6.	-3,4	7 280	-0,9	512	11,56	5 300.10^4	- 461
7.	-3,4	6 990	-0,9	222	11,56	4 886.10^4	- 200
8.	-5,8	7 300	-3,3	532	33,64	5 329.10^4	-1 756
9.	-6,0	7 250	-3,5	482	36,00	5 256.10^4	-1 687
10.	-6,6	7 670	-4,1	902	43,56	5 882.10^4	-3 698
11.	-7,3	7 110	-4,8	342	53,29	5 055.10^4	-1 642
12.	-5,1	7 570	-2,6	802	26,01	5 730.10^4	-2 085
13.	-8,3	7 520	-5,8	752	68,89	5 655.10^4	-4 362
14.	-7,2	7 720	-4,7	952	51,84	5 960.10^4	-4 474
15.	-3,2	7 080	-0,7	312	10,24	5 012.10^4	- 218
16.	-3,7	7 230	-1,2	462	13,69	5 227.10^4	- 554
17.	-2,0	6 660	0,5	- 108	4,00	4 435.10^4	- 54
18.	-2,4	6 860	0,1	92	5,76	4 706.10^4	92
19.	-2,9	6 570	-0,4	- 198	8,41	4 316.10^4	- 79
20.	-0,8	6 580	1,7	- 188	0,64	4 330.10^4	- 263
21.	0,8	6 090	3,3	- 678	0,64	3 709.10^4	-2 237
22.	1,4	5 020	3,9	-1 748	1,96	2 520.10^4	-6 817
23.	1,7	5 370	4,2	-1 398	2,89	2 884.10^4	-5 872
24.	3,8	5 570	6,3	-1 198	14,44	3 102.10^4	-6 547
25.	2,8	5 120	5,3	-1 648	7,84	2 621.10^4	-8 734
26.	1,5	5 640	4,0	-1 128	2,25	3 181.10^4	-4 512
27.	3,6	5 400	6,1	-1 368	12,96	2 916.10^4	-8 345
28.	3,8	7 680	6,3	912	14,44	5 898.10^4	5 746
29.	1,2	6 420	3,7	- 348	1,44	4 122.10^4	-1 288
30.	-0,3	7 100	2,2	332	0,09	5 041.10^4	730
31.	1,8	6 480	4,3	- 288	3,24	4 200.10^4	1 238
$\sum_{i=1}^{n}$	76,1	209 810			634,49	144 277.10^4	-88 598

külső
hőmérséklet

gázfogyasztás

lakossági fogyasztás leginkább a .... alakulásától függ. Ábrázoljuk először a január havi napi átlaghőmérséklet és a .... közötti összefüggést egy diagramban (6. ábra).



6. ábra
Napi gázfogyasztás és hőmérséklet közötti összefüggés 1971. január hónapban egy gázátadó állomáson

lineáris

y = ax + b

lineáris korrelációs

A pontdiagram alapján a .... közelítés látszik legmegfelelőbbnek. Igy a két változó közötti kapcsolatot az

....

alakban keressük. Számitásainkat táblázatos formában végezzük (11. táblázat).

A táblázat értékei alapján először meghatározzuk a .... együttható értékét.

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} \cdot d_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} d_{y_i}}} =$$

$$= \frac{-88\,598}{\sqrt{634{,}49 \cdot 114\,277 \cdot 10^4}} = -0{,}88$$

A lineáris korrelációs együttható szignifikancia vizsgálatát közvetlenül is elvégezhetjük.

$H_o : \varrho_{x,y} = 0$

$\alpha = 0{,}05$

$DF = n - 2 = 31 - 2 = 29$

$r_{krit} =$ 0,349

$r_{x,y} > r_{krit}$

H_o : nem igaz.

A két változó között szignifikáns ...... lineáris kapcsolat mutatható ki. Igy meghatározhatjuk az egyenes paramétereit.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i} d_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^2} = \frac{-88\,598}{634{,}49} = -197{,}6$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 6\,768 - (-197{,}6) \cdot (-2{,}5) = 6\,274$

6 274 - 197,6x

Tehát a regressziós egyenes egyenlete

y = ...

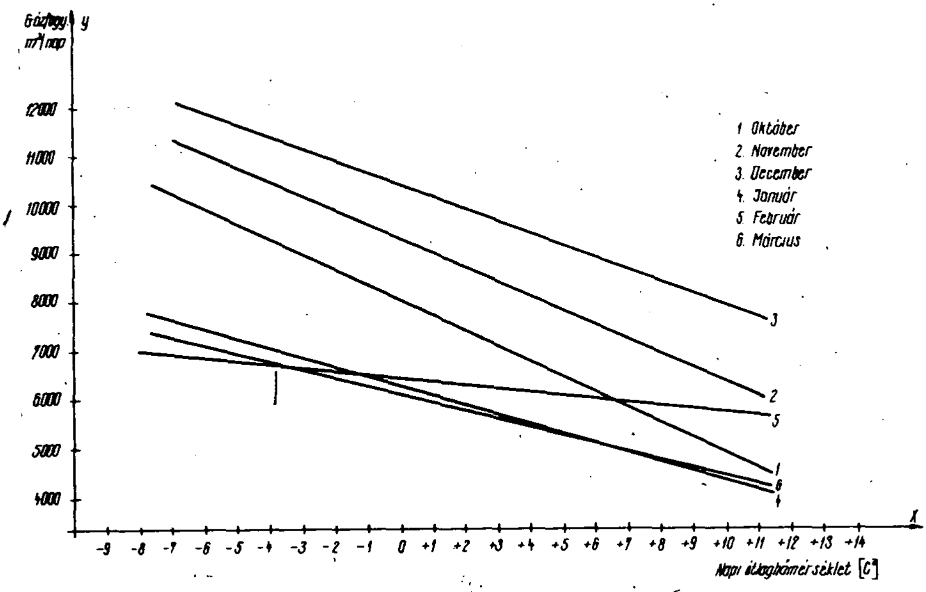
A meghatározott egyenest a 6. ábrába berajzoltuk.

A további hónapokra vonatkozó számitásokat mellőzzük, csupán a meghatározott regressziós egyenes egyenletét és a korrelációs együttható értékét közöljük. A szignifikancia szintet $\alpha = 5\%$-nak választottuk. A szignifikáns megjegyzés utal az $\varrho_{x,y} = 0$ nullhipotézis elutasitására (12. táblázat).

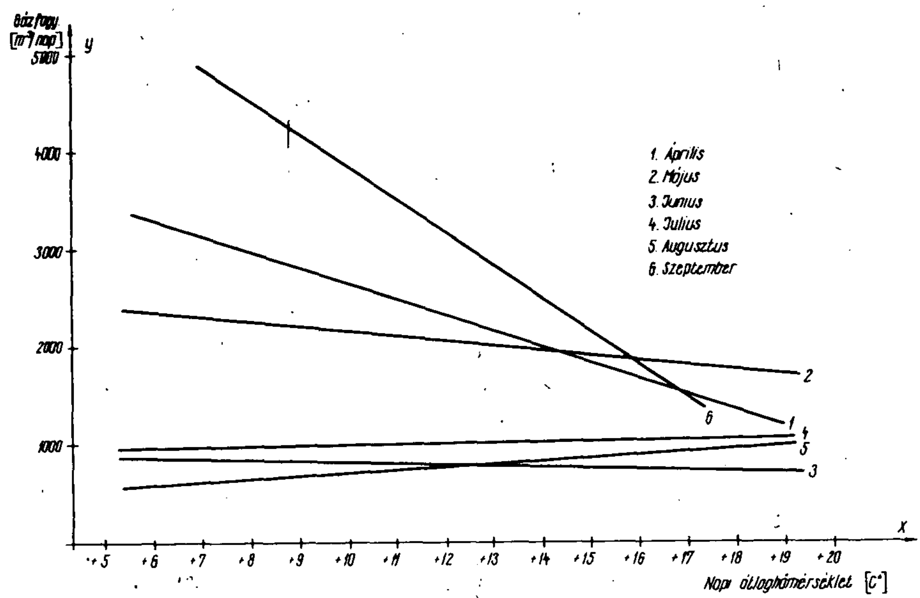
12. táblázat

Hónap	Egyenes egyenlete	Korrelációs együttható
1. Január	y = 6 283,9-197,6 x	$r_{x,y}$ = -0,880 szignifikáns
2. Február	y = 6 513,9- 98,3 x	$r_{x,y}$ = -0,315 nem szignifikáns
3. Március	y = 6 153,5-272,3 x	$r_{x,y}$ = -0,950 szignifikáns
4. Április	y = 4 351,2-178,4 x	$r_{x,y}$ = -0,630 szignifikáns
5. Május	y = 3 630,1-145,4 x	$r_{x,y}$ = -0,891 szignifikáns
6. Junius	y = 949,3- 10,7 x	$r_{x,y}$ = -0,207 nem szignifikáns
7. Julius	y = 761,2+ 23,8 x	$r_{x,y}$ = 0,059 nem szignifikáns
8. Augusztus	y = 36,3+ 56,9 x	$r_{x,y}$ = 0,827 szignifikáns
9. Szeptember	y = 7 566,7-360,6 x	$r_{x,y}$ = -0,748 szignifikáns
10. Október	y = 8 045,8-288,4 x	$r_{x,y}$ = -0,743 szignifikáns
11. November	y = 9 487,4-306,8 x	$r_{x,y}$ = -0,801 szignifikáns
12. December	y =10 529,6-268,1 x	$r_{x,y}$ = -0,367 nem szignifikáns

A meghatározott egyenesek egyenletét ábrázoltuk a 7., 8. ábrákon.



7. ábra
Napi gázfogyasztás és hőmérséklet közötti összefüggés 1971. "téli" hónapjaiban egy gázátadó állomáson



8. ábra
Napi gázfogyasztás és hőmérséklet közötti összefüggés 1971. "nyári" hónapjaiban egy gázátadó állomáson

13. táblázat

Hónap	x_i	y_i	d_{x_i}	d_{y_i}	$d^2_{x_i}$	$d^2_{y_i}$	$d_{x_i} \cdot d_{y_i}$
1. Január	-2,15	6 768	12,82	-2 562	6,00	$45\,806.10^3$	-32 845
2. Február	1,9	6 299	8,47	-2 093	3,61	$39\,677.10^3$	-17 728
3. Március	2,5	5 476	7,87	-1 270	6,25	$29\,986.10^3$	- 9 995
4. Április	11,5	2 290	-1,13	1 916	132,25	$5\,244.10^3$	- 2 165
5. Május	17,8	1 035	-7,43	3 171	316,84	$1\,071.10^3$	-23 560
6. Junius	18,6	724	-8,23	3 482	345,96	$5\,242.10^3$	-28 657
7. Julius	21,1	1 265	-10,73	2 941	445,21	$1\,600.10^3$	-31 557
8. Augusztus	22,0	1 266	-11,63	2 940	484,00	$1\,602.10^3$	-34 192
9. Szeptember	14,3	2 358	-3,93	1 848	204,49	$5\,560.10^3$	-7 263
10. Október	9,2	5 331	1,17	-1 125	84,64	$28\,419.10^3$	1 316
11. November	5,3	7 852	5,07	-3 646	28,09	$61\,653.10^3$	18 485
12. December	2,7	9 810	7,67	-5 604	7,29	$96\,236.10^3$	42 982
$\sum_{i=1}^{n}$	124,5	50 474			2 064,63	$378\,929.10^3$	-250 745

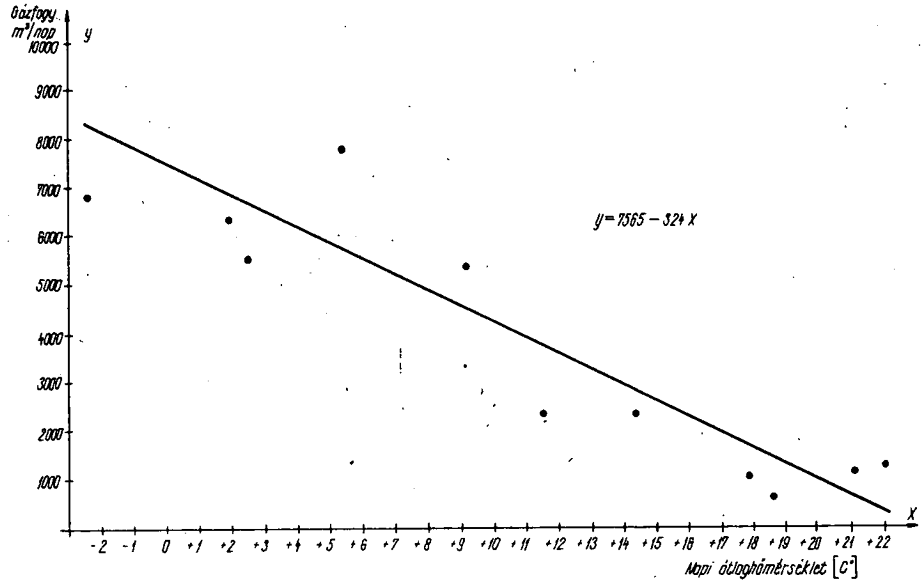
nem szignifikánsak
pozitiv
szoros

negativ

A korrelációs együtthatók főként a nyári hónapokbán .... Érdekes az augusztus hónap .... korrelációja, amely feltehehetőleg a strandolással összefüggő gázfogyasztással (melegviz, strandolás utáni fürdés) magyarázható. A december laza korrelációját feltehetőleg a több ünnepnap okozza. A korreláció szorosságát befolyásoló tényező még a gyakori hőmérsékletingadozás, amelyet a gázfogyasztás, a lakások hőkapacitása miatt, csak bizonyos késéssel követ.

A fentiektől függetlenül megállapithatjuk, hogy általában szoros .... korreláció állapitható meg a lakosság napi gázfogyasztás és a napi átlaghőmérséklet között.

Végezetül vizsgáljuk meg a havi átlaghőmérséklet és a havonkénti napi átlagos fogyasztás közötti összefüggést.



9. ábra
Havonkénti napi átlagos gázfogyasztás a havi átlagos hőmérséklet függvényében egy város 1971. évi adatai alapján

Adatainkat és a számitást a következő táblázatban tüntettük fel (13. táblázat, lásd 214. oldal).

$r_{x,y} = -0,463$

$a = -324$

$b = 7\,565$

$y = 7\,565 - 324x$

A fenti lineáris korrelációs együttható nem mutat szignifikáns korrelációs kapcsolatot.
Ettől függetlenül a pontokat és az egyenest is ábrázoltuk a 9. ábrán, lásd előző oldal.

5. A viz mennyisége és minősége egymástól elválaszthatatlan tényezők és együttesen határozzák meg a vizkészletet.

Ha egy-egy adott vizfolyásra rendelkezünk olyan konkrét matematikai összefüggéssel, amely a vizhozam és valamely vizminőségi paraméter közötti összefüggésre jellemző, akkor vállalkozhatunk arra, hogy jellemző vizhozamoknál jellemző vizminőségi értékeket határozzunk meg, vagy legalábbis előrejelzést tudjunk adni a várható értékekre.

Ennek megfelelően arra keresünk választ, hogy az általunk választott vizminőségi paraméter ($KMnO_4$-es O_2 fogyasztás, amely a vizfolyás szerves szennyezettségének egyik mutatója) és a vizhozam között Magyarország egyik folyóján milyen összefüggés áll fenn.

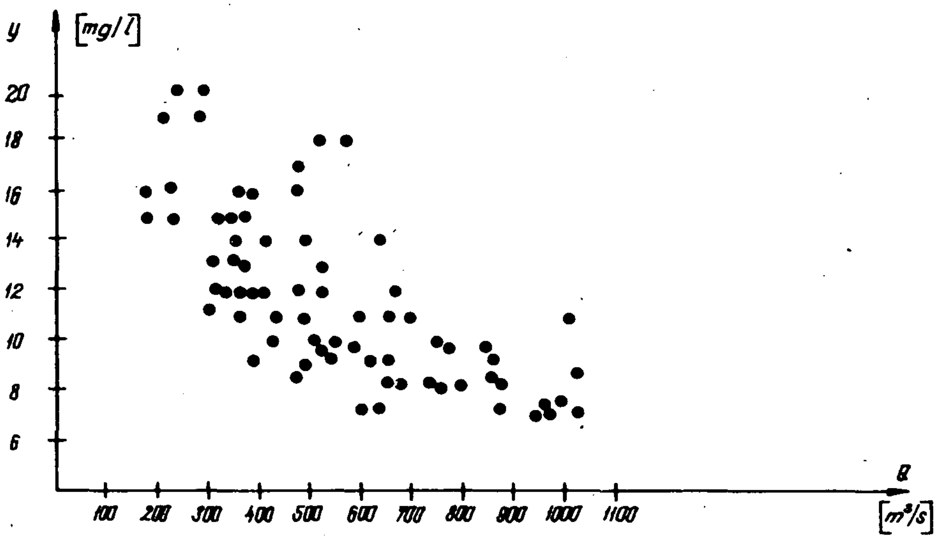
A rendelkezésre álló adatokat csak a számitásokkal együtt közöljük.

Megfigyeléseinket január 1-től május 31-ig végeztük. Ezen időszak alatt 78 összetartozó elemzési és vizhozam-adat áll rendelkezésünkre.

Megoldás

Jelöljük a függő változót ($KMnO_4$-es O_2 fogyasztás) y-nal, a független változót (vizhozam) Q-val. Kérdés, hogy az y = f (Q) függvénykapcsolat milyen összefüggéssel irható le. Az összetartozó y_i - Q_i értékpárokat egy koordináta-rendszerben ábrázoltuk (10. ábra). Az ábrázolt ponthalmaz .... összefüggésre utal. Ebből és linearizálási szándékunkból kiindulva uj ábrázolási módot válasz-

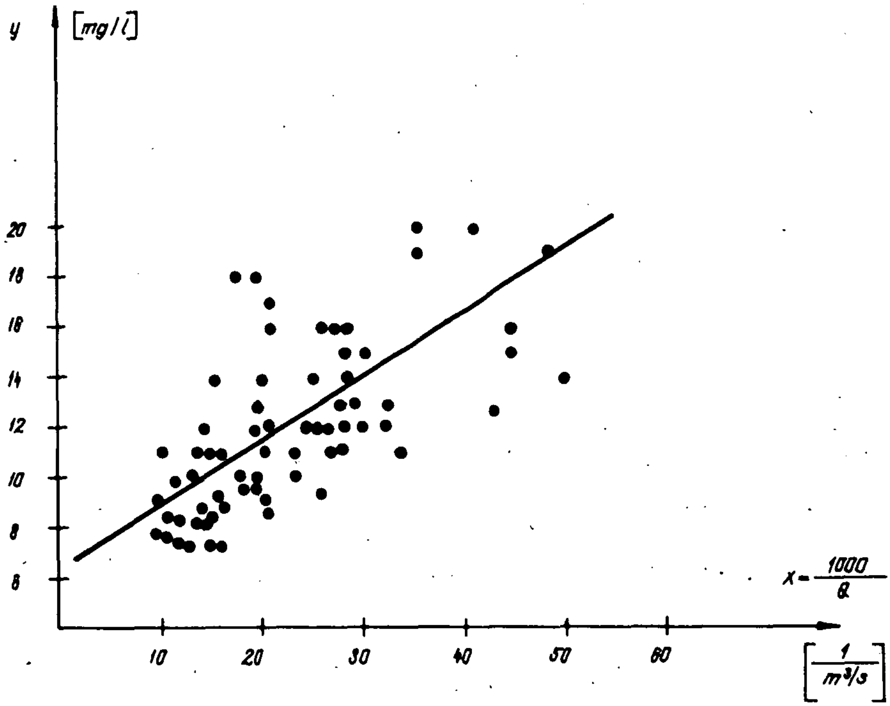
hiperbolikus



10. ábra
Az eredeti adatok ábrázolása

tottuk, és a $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás értékeit a vizhozam reciprokának (ill. számitástechnikai okból annak 10 000-szeresének) függvényében ábrázoltuk. Az igy kapott pontok egy oriegyenes

gót nem metsző .... körül sorakoznak (11. ábra). Ezek után feltehető, hogy a vizhozám és a $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás között az összefüggést



11. ábra
A transzformált adatok ábrázolása

$$y = b + a\frac{10\,000}{Q} = b + ax$$

alakban célszerü keresni, ahol:

$$x = \frac{10\,000}{Q}$$

lineáris

segédváltozó, amelynek bevezetésével a feladat .... közelitésre alkalmassá transzformálható.

Számitsuk ki először $r_{x,y}$ értékét lineáris közelités esetén a táblázat adatainak felhasználásával (14. táblázat)

14. táblázat

Sorszám	Q m^3/s	x_i $\frac{1}{m^3/s}$	y_i mg/l	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	$x_i - x$	$(x_i - x)^2$	$y_i - y$	$(y_i - y)^2$	y'	z_i	z_i^2
1.	208	48,0	19	912,0	2 304,0	361,0	26,71	713,42	7,4	54,76	18,38	0,62	0,38
2.	224	44,6	16	713,6	1 989,1	256,0	23,31	543,35	4,4	19,36	17,51	-1,51	2,28
3.	226	44,2	15	663,0	1 953,6	225,0	22,91	524,87	3,4	11,56	17,41	-2,41	5,81
4.	244	40,9	20	818,0	1 672,8	400,0	19,61	367,11	8,4	70,56	16,58	3,42	11,69
5.	284	35,2	19	668,8	1 249,0	361,0	13,91	193,49	7,4	54,76	15,13	3,87	14,98
6.	284	35,2	20	704,0	1 239,0	400,0	13,91	193,49	8,4	70,56	15,13	4,87	23,72
7.	296	33,7	11	370,7	1 135,7	121,0	12,41	154,00	-0,6	0,36	14,79	3,79	14,36
8.	300	33,3	11	366,3	1 108,9	121,0	12,01	144,24	-0,6	0,36	14,65	3,65	13,32
9.	300	33,3	11	366,3	1 108,9	121,0	12,01	144,24	-0,6	0,36	14,65	3,65	13,32
10.	304	32,8	13	426,4	1 075,8	169,0	11,51	132,48	1,4	1,96	14,52	1,52	2,31
11.	308	32,4	12	388,8	1 049,7	144,0	11,11	123,43	0,4	0,16	14,42	-2,42	5,86
12.	328	30,4	15	456,0	924,1	225,0	9,11	82,99	3,4	11,56	13,91	1,09	1,19
13.	334	29,9	12	358,8	894,0	144,0	8,61	74,13	0,4	0,16	13,78	-1,78	3,17
14.	336	29,7	15	445,5	882,0	225,0	8,41	70,73	3,4	11,56	13,73	1,27	1,61
15.	345	29,0	13	377,0	841,0	169,0	7,71	59,44	1,4	1,96	13,56	-0,56	0,31
16.	350	28,5	14	399,0	812,25	196,0	7,21	51,98	2,4	5,76	13,43	0,57	0,32
17.	358	27,9	12	334,8	778,41	144,0	6,61	43,69	0,4	0,16	13,28	-1,28	1,64
18.	358	27,9	16	446,4	778,41	256,0	6,61	43,69	4,4	19,36	13,28	2,72	7,40
19.	360	27,7	13	360,1	767,29	169,0	6,41	41,09	1,4	1,96	13,23	-0,23	0,05
20.	360	27,7	15	415,5	767,29	225,0	6,41	41,09	3,4	11,56	13,23	1,77	3,13
21.	360	27,7	11	304,7	767,29	121,0	6,41	41,09	-0,6	0,36	13,23	-2,23	4,97
22.	368	27,1	11	298,1	734,41	121,0	5,81	33,76	-0,6	0,36	13,07	-2,07	4,28
23.	368	27,1	16	433,6	734,41	256,0	5,81	33,76	4,4	19,36	13,07	2,93	8,58
24.	379	26,3	16	420,8	691,69	256,0	5,01	25,10	4,4	19,36	12,87	3,13	9,80

14. táblázat folytatása

25.	379	26,3	9,3	244,6	691,69	86,49	5,01	25,10	-2,3	5,29	12,87	-3,57	12,75
26.	391	25,5	12	306,0	650,25	144,0	4,21	17,72	0,4	0,16	12,67	-0,67	0,45
27.	397	25,1	12	301,2	630,01	144,0	3,81	14,52	0,4	0,16	12,56	-0,56	0,31
28.	400	25,0	12	300,0	625,00	144,0	3,71	13,76	0,4	0,16	12,54	-0,54	0,29
29.	400	25,0	14	350,0	625,00	196,0	3,71	13,76	2,4	5,76	12,54	1,46	2,13
30.	424	23,5	10	235,0	552,25	100,0	2,21	4,88	-1,6	2,56	12,16	-2,16	4,66
31.	431	23,2	11	255,2	538,24	121,0	1,91	3,66	-0,6	0,36	12,08	-1,08	1,17
32.	475	21,0	17	357,0	441,00	289,0	-0,29	0,084	5,4	29,16	11,52	5,48	30,03
33.	475	21,0	8,6	180,6	441,00	73,96	-0,29	0,084	-3,0	9,00	11,52	-2,92	8,52
34.	478	20,9	16	334,4	436,81	256,0	-0,39	0,15	4,4	19,36	11,50	4,50	20,25
35.	487	20,5	12	246,0	420,25	144,0	-0,79	0,62	0,4	0,16	11,40	0,60	0,36
36.	487	20,5	14	287,0	420,25	196,0	-0,79	0,62	2,4	5,76	11,40	2,60	6,76
37.	490	20,4	9,0	183,0	416,16	81,0	-0,84	0,79	-2,6	6,76	11,37	-2,37	5,62
38.	493	20,2	11	222,2	408,04	121,0	-1,09	1,19	-0,6	0,36	11,32	-0,32	0,10
39.	511	19,5	13	253,5	380,25	169,0	-1,79	3,21	1,4	1,96	11,14	1,86	3,46
40.	511	19,5	10	195,0	380,25	100,0	-1,79	3,21	1,6	2,56	11,14	-1,14	1,30
41.	514	19,4	12	232,8	376,36	144,0	-1,89	3,57	0,4	0,16	11,12	0,88	0,77
42.	517	19,3	18	347,4	372,49	324,0	-1,99	3,96	6,4	40,96	11,09	6,91	47,76
43.	517	19,3	9,7	187,2	372,49	-94,09	-1,99	3,96	-1,9	3,61	11,09	-1,39	1,93
44.	553	18,0	9,5	171,0	324,00	90,25	-3,29	10,82	-2,1	4,41	10,76	-1,26	1,59
45.	559	17,8	10	178,0	316,84	100,00	-3,49	12,18	-1,6	2,56	10,71	-0,71	0,50
46.	574	17,4	18	313,2	302,76	324,00	-3,89	12,18	6,4	40,96	10,61	7,39	54,61
47.	598	16,7	8,9	148,6	278,89	79,21	-4,59	21,07	-2,7	7,29	10,43	-1,53	2,43
48.	601	16,6	11	182,6	276,56	121,0	-4,69	22,00	-0,6	0,36	10,41	0,59	0,35
49.	609	16,4	7,3	119,7	268,96	53,29	-4,89	23,91	-4,3	18,49	10,35	-3,05	9,30
50.	621	16,1	9,3	149,7	259,21	86,49	-5,19	26,94	-2,3	5,29	10,28	-0,98	0,96
51.	640	15,6	7,5	117,0	243,36	56,25	-5,69	32,37	-4,1	16,81	10,16	-2,65	7,02
52.	645	15,5	14	217,0	240,25	196,00	-5,79	33,52	2,4	5,76	10,13	3,87	14,97

53.	654	15,3	8,3	127,0	234,09	68,89	-5,99	35,88	-3,3	10,89	10,08	1,78	3,17
54.	661	15,1	11	166,1	228,01	121,0	-6,19	38,32	-0,6	0,36	10,02	1,02	1,04
55.	667	15,0	9,4	141,0	225,00	88,36	-6,29	39,56	-2,2	4,84	10,00	-0,60	0,36
56.	673	14,8	12	178,2	220,52	144,00	-6,44	41,47	0,4	0,16	9,96	2,04	4,16
57.	691	14,4	8,2	118,65	209,38	67,24	-6,82	46,65	-3,4	11,56	9,86	-1,66	2,75
58.	703	14,2	11	156,42	202,21	121,00	-7,07	49,98	-0,6	0,36	9,80	1,20	1,44
59.	748	13,3	8,6	114,89	178,49	73,96	-7,93	62,95	-3,0	9,00	9,58	-0,98	0,96
60.	751	13,3	8,2	109,14	177,16	67,24	-7,98	63,68	-3,4	11,56	9,57	-1,37	1,88
61.	751	13,3	10	133,10	177,16	100,00	-7,98	63,68	-1,6	2,56	9,57	0,43	0,18
62.	763	13,1	9,8	128,38	171,61	96,04	-8,19	67,08	-1,8	3,24	9,52	0,28	0,08
63.	808	12,3	8,2	101,43	153,02	67,24	-8,92	79,67	-3,4	11,56	9,33	-1,13	1,28
64.	850	11,7	9,9	116,42	138,29	98,01	-9,51	90,44	-1,7	2,89	9,18	0,72	0,52
65.	871	11,4	8,5	97,58	131,79	72,25	-9,81	96,24	-3,1	9,61	9,11	-0,61	0,37
66.	874	11,4	8,4	96,09	130,87	70,56	-9,85	97,02	-3,2	10,24	9,10	-0,70	0,49
67.	874	11,4	9,5	108,68	130,87	90,25	-9,85	97,02	-2,1	4,41	9,10	0,40	0,16
68.	874	11,4	9,4	107,54	130,87	88,36	-9,86	97,02	-2,2	4,84	9,10	0,30	0,09
69.	886	11,2	8,1	91,37	127,24	65,61	-10,01	100,20	-3,5	12,25	9,05	-0,95	0,90
70.	886	11,2	8,4	94,75	127,24	70,56	-10,01	100,20	-3,2	10,24	9,05	-0,65	0,42
71.	892	11,2	7,4	82,95	125,66	54,76	-10,08	101,61	-4,2	17,64	9,04	-1,64	2,69
72.	961	10,4	7,0	72,80	108,16	49,00	-10,89	118,59	-4,6	21,16	8,83	-1,83	3,35
73.	973	10,2	7,3	74,97	105,47	53,29	-11,02	121,44	-4,3	18,49	8,79	-1,49	2,22
74.	985	10,1	7,5	76,12	103,02	56,25	-11,14	124,10	-4,1	16,81	8,77	-1,27	1,61
75.	1018	9,82	7,8	76,59	96,43	60,84	-11,47	131,56	-3,8	14,44	8,68	-0,88	0,77
76.	1024	9,76	11	107,36	95,26	121,00	-11,53	132,94	-0,6	0,36	8,67	2,33	5,43
77.	1042	9,59	9,0	86,31	91,98	81,00	-11,70	136,89	-2,6	6,76	8,63	0,37	0,14
78.	1045	9,56	8,9	85,08	91,39	79,21	-11,73	137,59	-2,7	7,29	8,62	0,28	0,08
$\sum_{i=1}^{78}$		1 660,97	904,9	20 912,62	41 848,02	11 345,95		6 468,28		847,95			431,35

$\varrho_{x,y} = 0$

78 - 2

nem igaz

szignifikáns

$r^2_{x,y}$

49,1%-ban

$\bar{x} = 21,294 \qquad \bar{y} = 11,60$

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}} =$$

$$= \frac{20\ 912,62-78.21,294.11,60}{\sqrt{(41\ 848,02-78\ 453,43)(11\ 345,95-78\ 134,56)}} =$$

$= 0,701$

H_0 : ....

$\alpha = 1\%$

DF = n - 2 = ... = 76

$r_{krit} = 0,285$

$r_{krit} < r_{x,y}$

H_0 : ....

Az adatok alapján állithatjuk, hogy a vizmennyiség és a $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás között .... korrelációs kapcsolat van.

A determinációs index

$d_{x,y}$ = ... = 0,491

azaz a vizsgált vihhozam intervallumban (200-1 050 m^3/s) a $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás ingadozás .... a vizhozam változásával magyarázható.

A fentiek alapján meghatározhatjuk az illesztett .... paramétereit.

egyenes

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{20\,912{,}62-78{,}21{,}294.11{,}60}{41\,848{,}02-78.453{,}43} = 0{,}254$$

$$b=\bar{y} - a\bar{x} = 11{,}60-0{,}254.21{,}294 = 6{,}19$$

Igy a vizsgált folyón a vizhozam és a $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás közötti kapcsolatot a következő függvény irja le a segédváltozót is behelyettesitve:

$$y = 6{,}19 + 0{,}254x = 6{,}19 + $$
$$+ 0{,}254 \frac{10\,000}{Q}$$

Az összefüggés alapján becsült értékeket a továbbiakban y'_i-vel jelöljük.

Az előzőekben meghatározott egyenlet gyakorlati jelentősége, hogy választ kaphatunk arra vonatkozóan, hogy bizonyos tartóssággal előforduló, az adott vizfolyásra jellemző kis és közepes vizhozamoknál mi a ....várható értéke, nevezetesen a szerves szennyeződést jellemző $KMnO_4$-es O_2 fogyasztás értéke mennyi lesz. Ezen vizhozamadatok:

szennyeződés

Q_{kis} = 240 m^3/s,

$Q_{köz}$ = 595 m^3/s, az ezekhez tartozó y' értékek:

$$y'_{Q_{kis}} = 6{,}19 + 0{,}254\ \frac{10\ 000}{240} = 16{,}80\ \text{mg/l}$$

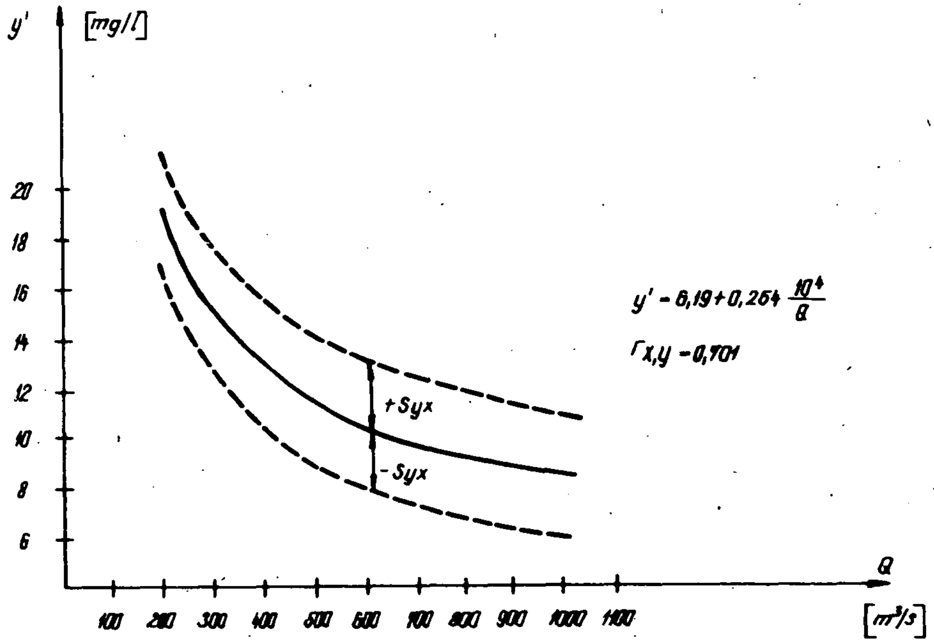
$$y'_{Q_{köz}} = 6{,}19 + 0{,}254\ \frac{10\ 000}{595} = 10{,}5\ \text{mg/l}$$

Határozzuk meg a becslés becsült szórását. Ezt kétféleképpen tehetjük meg

$$s_{y,x} = s_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{n} = \frac{431{,}35}{78} = 2{,}35$$

$$s_{y,x} = s_y \sqrt{1 - r_{x,y}^2} = \sqrt{s_y^2 (1 - r_{x,y}^2)} =$$

$$= 10{,}87(1 - 0{,}701^2) = 2{,}35$$



12. ábra
Egységnyi szóráshoz tartozó konfidencia intervallum

ahol:

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{847,95}{78} = 10,87$$

$$z_i = y_i' - y_i$$

Az egységnyi szóráshoz tartozó konfidencia intervallummal együtt ábrázoltuk a meghatározott függvényt a 12. ábrán.

Tekintettel arra, hogy az összefüggés egyenletét a sokaságból véletlenszerüen kiválasztott 78 elemszámu .... alapján határoztuk meg, a sokaságra jellemző hiperbolának valódi elhelyezkedése .... a minta alapján számitottétól. Igy a regressziós görbe egyenletében szereplő a és b állandók értéke ....a valódi sokaságra jellemző értékektől.

minta

eltérhet

eltérhet

Határozzuk meg a és b paraméterek becsült szórását

$$s_a = \frac{s_{y,x}}{s_x\sqrt{n}} = \frac{2,38}{9,07\sqrt{78}} = 0,029 \sim 0,03$$

$$s_{y,x} = s_{y,x}\sqrt{\frac{n}{n-2}} = 2,35.\sqrt{\frac{78}{78-2}} = 2,38$$

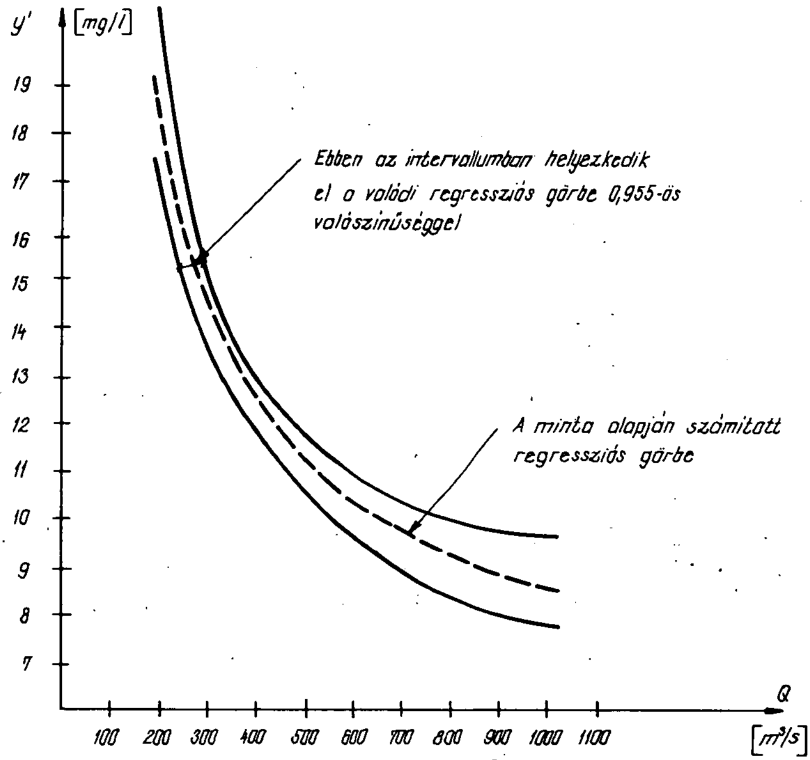
$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{6\,468,28}{78}} = \sqrt{82,296} =$$

$$= 9,07$$

$$s_b = \frac{s_{y,x}}{\sqrt{n}} = \frac{2,38}{\sqrt{78}} = 0,269$$

Ezekből y' becsült szórása a következőképpen számolható:

$$s_y = \sqrt{s_b^2 + (s_a . x)^2}$$



13. ábra
A regressziós görbe becsült szórása

$s_{y'}$ értékeket x értékei függvényében táblázatosan számitottuk ki (15. táblázat).

Az egyes x értékeket tetszőlegesen választottuk ki ugy, hogy átfogjuk az egész tartományt. Az ábrán felrajzoltuk azt a sávot, amelyben az alapsokaság regressziós görbéje 95,5%-os valószinüséggel helyezkedik el (13. ábra). A meghatározott összefüggés természetesen a vizsgált intervallumra igaz, és az intervallumon kivüli értékek becslésére csak fokozott óvatossággal használható.

15. táblázat

Q	x_i	$x_i-\bar{x}$	$s_a.x$	$(s_a.x)^2$	s_b	$s_{y'}^2$	$s_{y'}$	$2s_{y'}$
208	48,0	26,706	0,8011	0,6417	0,074	0,7157	0,847	1,694
300	33,3	12,006	0,3602	0,1297	0,074	0,2037	0,452	0,908
350	28,5	7,206	0,2162	0,0467	0,074	0,1207	0,348	0,696
400	25	3,706	0,1112	0,0124	0,074	0,0864	0,294	0,588
493	20,2	1,094	0,0328	0,0011	0,074	0,0751	0,275	0,550
559	17,8	-3,494	0,1048	0,0198	0,074	0,0938	0,306	0,612
655	15,3	-5,994	0,1798	0,0333	0,074	0,1073	0,328	0,656
751	13,31	-7,984	0,2395	0,0574	0,074	0,1314	0,362	0,724
808	12,37	-8,924	0,2677	0,061	0,074	0,135	0,368	0,736
892	11,21	-10,084	0,3025	0,0915	0,074	0,1655	0,405	0,810
1018	9,17	-11,474	0,3342	0,1162	0,074	0,1902	0,437	0,934

6. A kiválasztott tipusu elektroncsövek élettartamára jellemző az azonos körülmények között mért katódáram értékének időbeli változása. Milyen összefüggéssel közelithető ez?

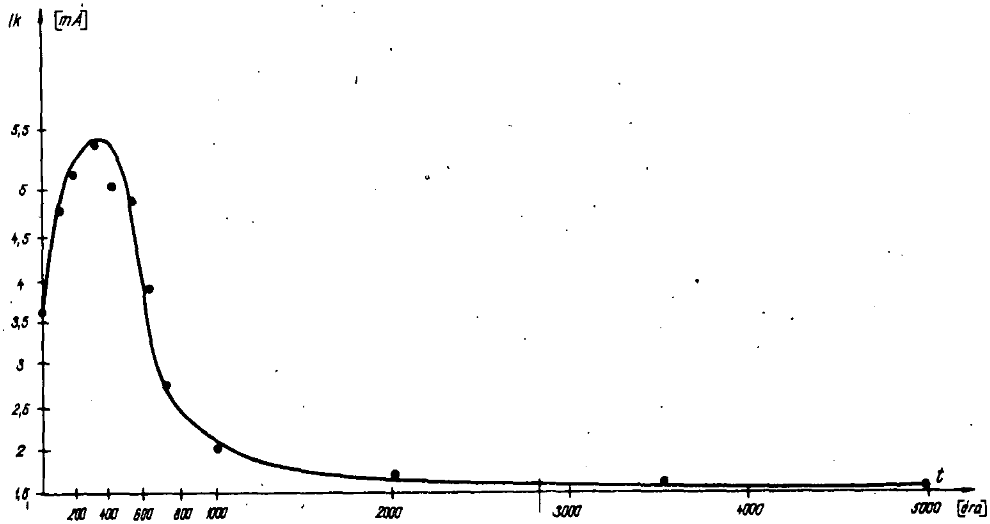
Az alábbiak szerint ismertek a 10 000 órás égetés különböző t_i időpontjaiban az átlagos katódáram értékek.

t_i (óra)	$\bar{I}_k$(mA)
0	3,64
100	4,71
200	5,21
300	5,30
400	5,08
500	4,75
600	3,81
700	2,72
1000	2,03

t_i (óra)	$\bar{I}_k$ (mA)
2000	1,67
3500	1,61
5000	1,59
10000	1,56

<u>Megoldás</u>

A táblázat adatainak statisztikai feldolgozásához az adatokat célszerüen diagramban ábrázoljuk (14. ábra).



14. ábra
Átlagos katódáram értékek időbeli változása

két

A diagram ábrázolása látható, hogy a görbe .... elkülönülő tartományra oszlik.

700

A két tartomány határa körülbelül t=.... óránál van.

parabolához, hiperbolához

Jellegénél fogva az első tartomány .... a második .... hasonlit.

Feladatunk a két tartományra külön-külön a........................... meghatározása, és az ezekhez tartozó .... kiszámitása.

regressziós függvény
korrelációs
index

A regressziós függvény meghatározása az első szakaszon

Másodfoku függvény általános alakja: $y =$ .... ezekből számunkra ismeretlenek ....

$ax^2 + bx + c$
a, b és c

Az együtthatók meghatározásához a .... módszerét alkalmazzuk.

legkisebb négyzetek

Képezzük az $f(a,b,c) =$ ....

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2$$

háromváltozós függvényt és keressük meg a, b és c azon értékeit, amelyek mellett f értéke ....

minimális.

Ebben az esetben az a, b és c szerinti parciális deriváltak .... értéket vesznek fel. A számitás egyszerüsitése céljából bevezetjük az

$u_i = x_i^2$ jelölést.

nulla

A keresett deriváltak értéke:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i - au_i - bx_i - c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - au_i - bx_i - c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - au_i - bx_i - c)$$

Feladatunk megkeresni azon a, b és c értékeket, melyekre a fenti összefüggések igazak. Egy szorzat értéke akkor nulla, ha legalább .... nulla.

egy tényezője

A változóknak képezhetjük a saját át-nullával

$u_i - \bar{u}$

$x_i - \bar{x}$

$y_i - \bar{y}$

0

$\bar{y} - a\bar{u} - b\bar{x}$

eltolását

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i \Delta y_i - a \sum_{i=1}^{n} (\Delta u_i)^2 - b \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta u_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i - a \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta u_i - b \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

laguktól való különbségét is, ekkor olyan uj változót kapunk, melynek szummája éppen .... egyenlő.

Az uj változót jelöljük Δ-val. Tehát

$\Delta u_i = \dots\dots\dots$

$\Delta x_i = \dots\dots\dots$

$\Delta y_i = \dots\dots\dots$

Feltételünk szerint $\sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \dots\dots\dots$

Az uj változó bevezetésével c értékére megkötésünk van, mert a deriváltak zárójeles kifejezése változatlan értéken tartásához

c = ... tartozik

Egyenleteinket az uj változókkal felirva az utolsó egyenlet nullává válik, ami a parabola .... jelenti. Az első két egyenletet pedig a jelzett müveletek elvégzése után a következő:

1. ....

2. ....

Az egyenletek felirása után a számitásokat célszerüen táblázatos formában végezzük el (16. táblázat).

16. táblázat

	x_i	y_i	$\frac{u_i}{10^{-4}}$	Δx_i	Δy_i	$\frac{\Delta u_i}{10^{-4}}$	$\Delta x_i \Delta y_i$	$\frac{\Delta x_i \Delta u_i}{10^5}$	$\frac{\Delta u_i \Delta y_i}{10^4}$	$\frac{(\Delta x_i)^2}{10^4}$	$\frac{(\Delta u_i)^2}{10^8}$	$(\Delta y_i)^2$
1	0	3,64	0	-350	-0,76	-17,5	266	612	13,30	12,25	306,25	0,5776
2	100	4,71	1,1	-250	0,31	-16,5	-77,5	412	-5,11	6,25	272,25	0,0961
3	200	5,21	4	-150	0,81	-13,5	-121,4	202	-10,93	2,25	182,25	0,6561
4	300	5,30	9,1	-50	0,90	-8,5	-45	42,5	-7,65	0,25	72,25	0,8100
5	400	5,08	16	50	0,68	-1,5	34,0	-7,5	-1,02	0,25	2,25	0,4624
6	500	4,75	25	150	0,35	7,5	52,5	112,5	2,62	2,25	56,25	0,1225
7	600	3,81	36	250	-0,59	18,5	-147,4	462	-10,91	6,25	342,25	0,3481
8	700	2,72	49	350	-1,68	31,5	-588,	1101	-52,90	12,25	992,25	2,8224
	2800	35,22	140				-630,8	2936,5	-72,6	42	2226	5,892

átlagok: $\bar{x} = 350$ $\bar{y} = 4,40$ $\bar{u} = 17,5 \cdot 10^{-4}$

A táblázat számértékeit behelyettesitve többismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyekből a, b és c értéke kiszámitható

$a = -1,65.10^{-5}$

$b = 0,01$

$c = 3,79$

Az együtthatók ismeretében felirhatjuk a keresett regressziós függvényt:

$y = -1,65.10^{-5}x^2 + 0,01x + 3,79$

....

Ezt a regressziós egyenletet csak a

$t < 700$ óra

.............időtartományban értelmezzük. A kapcsolat szorosságát mutató korrelációs index definiciószerüen:

$$I_{x,y} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[y(x_i) - y_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

....

Az összefüggésben szereplő adatok az előzőekből már ismertek, illetve számithatók. Az adatokat táblázatosan felirva (17. tábl.)

17. táblázat

i	x_i	x_i^2	$-1,65.10^{-5}x_i^2$	$0,01x_i$	$y(x_i)$	y_i	$y(x_i)-y_i$	$[y(x)-y_i]^2$
1	0	0	0	0	3,79	3,64	0,15	0,0225
2	100	1	-0,165	1	4,625	4,71	-0,085	0,00722
3	200	4	-0,660	2	5,13	5,21	-0,08	0,0064
4	300	9	-1,485	3	5,305	5,3	0,005	0,000025
5	400	16	-2,64	4	5,15	5,08	0,07	0,0049
6	500	25	-4,12	5	4,67	4,75	-0,08	0,0064
7	600	36	-5,94	6	3,796	3,81	-0,014	0,000196
8	700	49	-8,08	7	2,71	2,72	-0,01	0,0001

a számértékek behelyettesitése után a kapott korrelációs index:

$$I = 0,996$$

A regressziós függvény meghatározása a második szakaszra

Az első szakasz elemzése után a $t >$ .... intervallumra kell meghatároznunk a .... és a ....

Vizsgáljuk meg a görbét. Jellegét tekintve ez a szakasz .... hasonlit.

A hiperbola egyenletének számunkra fontos általános alakja: ....

Ha x helyett .... segédváltozózóval dolgozunk, akkor .... egyenletet kapunk, aminek a normál egyenleteit könnyen felirhatjuk.

....

....

Ismeretlenek itt .... együtthatók. A számértékeket táblázatos formában felirhatjuk (18. táblázat).

Az egyenletrendszer megoldása után

$$a = 1,377 \; ; \quad b = 829$$

A keresett hiperbola egyenlete:

....

700 óra

regressziós függvényt

korrelációs indexet.

hiperbolához

$$y = a + b\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}$$

egyenes

$$y = na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y.\frac{1}{x} = a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x^2}$$

a és b

$$y = 1,377 + 829\,\frac{1}{x}$$

18. táblázat

i	x_i	$\frac{10^{-3}}{x_i}$	y_i	$\frac{y_i}{x_i \cdot 10^{-3}}$	$\frac{10^{-6}}{x_i^2}$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	700	1,429	2,72	3,88	2,04	0,8567	0,7330
2	1000	1,000	2,03	2,03	1,00	0,1667	0,0268
3	2000	0,500	1,67	0,835	0,125	-0,1933	0,0347
4	3500	0,286	1,61	0,46	0,082	-0,2533	0,0644
5	5000	0,200	1,59	0,318	0,04	-0,2733	0,0747
6	10000	0,100	1,56	0,156	0,01	-0,3033	0,0921
$\sum_{i=1}^{6}$		3,515	11,18	7,769	3,422		1,0290

$\bar{y} = 1,8633$

A korrelációs index meghatározását az előzőek szerint elvégezzük. A szükséges adatokat csoportositva felirjuk (19. táblázat).

19. táblázat

i	x_i	$\frac{10^{-3}}{x_i}$	$\frac{829}{x_i}$	$y(x_i)$	y_i	$y_i - y(x_i)$	$[y_i - y(x_i)]^2$
1	700	1,429	1,1825	2,5598	2,72	0,1602	0,0257
2	1000	1,000	0,8290	2,2063	2,03	-0,1763	0,0311
3	2000	0,500	0,4145	1,7918	1,67	-0,1218	0,0148
4	3500	0,286	0,2367	1,6140	1,61	-0,0040	0,0000
5	5000	0,200	0,1658	1,5431	1,59	0,0469	0,0022
6	10000	0,100	0,0829	1,4602	1,56	0,0998	0,0100
$\sum_{i=1}^{6}$							0,0838

Eredményül $I = 0,957$ értéket kapunk. Az átlagokból számitott korrelációs kapcsolat mindig igen szoros, és nem ad felvilágositást az ingadozás mértékéről, csupán megmutatja az átlagos értékek közötti összefüggés jellegét. Ebből adódóan ilyen esetekben konfidencia intervallum számítása pl. nem indokolt, illetve kiszámítva az csupán az átlagokra vonatkozóan mutatja meg a konfidencia intervallumot.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Födém béléstesteket gyártó betonüzem gyártási adatainak alapján vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés van a napi gyártott darabszám és a selejtes termékek száma között. Az elmult hónap termelési adatait a táblázatban adtuk meg (16. táblázat).

   (R = 0,885; $r_{x,y}$ = 0,867; y = 0,0603x - 10,92; $r_{\lg x,y}$ = 0,855;

   y = 46,599 lg x - 107,51)

16. táblázat

Nap	Termelés db	Selejt db	Nap	Termelés db	Selejt db
1	366	11	13	433	15
2	368	9	14	437	18
3	360	9	15	467	17
4	365	7	16	456	18
5	378	13	17	475	17
6	378	12	18	479	19
7	392	14	19	510	20
8	403	13	20	506	19
9	405	17	21	486	18
10	410	16	22	491	19
11	448	17	23	490	16
12	426	16	24	505	17

2. Számitsa ki a 4. feladatban csak megadott korrelációs együtthatókat és a regressziós egyenesek paramétereit!

AJÁNLOTT IRODALOM

1. Dr. Kindler József: Statisztikai elemzés. Felsőfoku Vegyipari Gépészeti Technikum jegyzete.
NIM IGÜSZI soksz., Bp. 1967.

2. J.M. Moroney: A számoktól a tényekig. Gondolat Könyvkiadó, Bp.1970.

3. Köves Pál-Párniczky Gábor: Általános statisztika. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1973.

4. Hajtman Béla: Bevezetés a matematikai statisztikába (pszichológusok számára), Akadémiai Könyvkiadó, Bp. 1968.

5. Vincze István (szerk.): Statisztikai minőségellenőrzés, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1958.

6. Vincze István Matematikai statisztikai ipari alkalmazásokkal, Müszaki Könyvkiadó, Bp. 1968.

7. Körmendy László: Bevezetés a biometriába, MTKI jegyzete, Ve.44. Bp. 1964.

8. M.Felix-K.Bláha: Matematikai statisztika a vegyiparban, Müszaki Könyvkiadó, Bp. 1964.

9. J.M. Juran: Minőség tervezés, szabályozás, ellenőrzés. Müszaki Könyvkiadó, Bp. 1966.

10. Theiss Ede (szerk.): Korreláció és trendszámitás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1958.

11. M. Ezekiel - K.A.Fox: Korreláció és regresszió analizis, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1970.

12. G.U. Yule-M.G. Kendall: Bevezetés a statisztika elméletébe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1964.

13. Dr. Kindler József: Matematikai statisztika II. Tanszéki belső sokszorositás.

14. Dr. Kindler József: A Kendall-féle egyetértési együttható és alkalmazásai, tanszéki belső sokszorositás, Bp. 1969.

További bibliográfia található:

15. Segédkönyv, Martin Kenneth Starr: Rendszerszemléletü termelésszervezés cimü könyvhöz, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1974.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Normális eloszlás

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du$$

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
0,00	0,3989	0,5000	0,30	0,3814	0,6179	0,60	0,3332	0,7257
01	3989	5040	31	3802	6217	61	3312	7291
02	3989	5080	32	3790	6265	62	3292	7324
03	3988	5120	33	3778	6293	63	3271	7389
04	3986	5160	34	3765	6331	64	3251	7389
05	3984	5199	35	3752	6368	65	3230	7422
06	3892	5239	36	3739	6406	66	3209	7454
07	3980	5279	37	3725	6443	67	3187	7486
08	3977	5319	38	3712	6480	68	3166	7517
09	3973	5359	39	3697	6517	69	3144	7549
0,10	0,370	0,5398	0,40	0,3683	0,6557	0,70	0,3123	0,7580
11	3965	5438	41	3668	6591	71	3101	7611
12	3961	5478	42	3653	6628	72	3079	7642
13	3956	5517	43	3637	6664	73	3056	7673
14	3951	5557	44	3621	6700	74	3034	7703
15	3945	5596	45	3605	6736	75	3011	7734
16	3939	5636	46	3589	6772	76	2989	7764
17	3932	5675	47	3572	6808	77	2966	7794
18	3925	5714	48	3555	6844	78	2943	7823
19	3918	5753	49	3538	6879	79	2920	7852
0,20	0,3910	0,5793	0,50	0,3521	0,6915	0,80	0,2897	0,7881
21	3902	5832	51	3503	6950	81	2874	7910
22	3894	5871	52	3485	6985	82	2850	7939
23	3885	5910	53	3467	7019	83	2827	3967
24	3876	5948	54	3448	7054	84	2803	7995
25	3867	5987	55	3429	7088	85	2780	8023
26	3857	6026	56	3410	7123	86	2756	8051
27	3847	6064	57	3391	7157	87	2732	8078
28	3836	6103	58	3372	7190	88	2709	8106
29	3825	6141	59	3352	7224	89	2685	8133

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
0,90	0,2661	0,8159	1,20	0,1942	0,8849	1,50	0,1295	0,9332
91	2637	8186	21	1919	8869	51	1276	9345
92	2613	8212	22	1895	8888	52	1257	9357
93	2589	8238	23	1872	8907	53	1238	9370
94	2565	8264	24	1849	8925	54	1219	9382
95	2541	8289	25	1826	8944	55	1200	9394
96	2516	8315	26	1804	8962	56	1182	9406
97	2492	8340	27	1881	8980	57	1163	9418
98	2468	8365	28	1858	8997	58	1145	9429
99	2444	8389	29	1836	9015	59	1127	9441
1,00	0,2420	0,8413	1,30	0,1714	0,9032	1,60	0,1109	0,9452
01	2396	8438	31	1691	9049	61	1092	9463
02	2371	8461	32	1669	8066	62	1074	9474
03	2347	8485	33	1647	9082	63	1057	9484
04	2323	8508	34	1626	9099	64	1040	9495
05	2299	8531	35	1604	9115	65	1023	9505
06	2275	8554	36	1582	9131	66	1066	9515
07	2251	8577	37	1561	9147	67	0989	9525
08	2227	8599	38	1539	9162	68	0973	9535
09	2203	8621	39	1518	9177	69	0957	9545
1,10	0,2179	0,8643	1,40	0,1497	0,9192	1,70	0,0940	0,9554
11	2155	8665	41	1476	9207	71	0925	9564
12	2131	8686	42	1456	9222	72	0909	9573
13	2107	8708	43	1435	9236	73	0893	9583
14	2083	8729	44	1415	9251	74	0778	9591
15	2059	8749	45	1394	9265	75	0863	9599
16	2036	8770	46	1374	9279	76	0848	9608
17	2012	8790	47	1354	9272	77	0833	9616
18	1989	8810	48	1334	9306	78	0818	9525
19	1965	8830	49	1315	9319	79	0804	9633

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
1,80	0,790	0,9641	2,20	0,0355	0,9861	2,80	0,0079	0,9974
81	0, 775	9649	22	0339	9868	82	0075	9976
82	0761	9656	24	0325	9875	84	0071	9977
83	0748	9664	26	0310	9881	86	0067	9979
84	0734	9671	28	0297	9887	88	0063	9980
85	0821	9678	30	0283	9893	90	0060	9981
86	0707	9686	32	0270	9898	92	0556	9982
87	0694	9693	34	0258	9904	94	0053	9984
88	0681	9699	36	0246	9909	96	0050	9985
89	0669	9706	38	0235	9913	98	0047	9986
1,90	0,0656	0,9713	2,40	0,0224	0,9918	3,00	0,00443	0,99665
91	0644	9719	42	0213	9922	10	00327	99903
92	0634	9729	44	0203	9927	20	00238	99931
93	0620	9732	46	0194	9931	30	00172	99951
94	0608	9738	48	0184	9934	40	00123	99966
95	0596	9744	50	0175	9938	50	00087	99976
96	0584	9750	52	0167	9941	60	00061	99984
97	0573	9756	54	0158	9945	70	00042	99989
98	0562	9761	56	0151	9948	80	00029	99993
99	0551	9767	58	0143	9951	90	00020	99995
2,00	0,0540	0,9772	2,60	0,0136	0,9953	4,00	0,000134	0,999968
02	0519	9783	62	0129	9956	50	000016	999997
04	0498	9793	64	0122	9959	5,00	000002	999997
06	0478	9803	66	0116	9961			
08	0459	9812	68	0110	9963			
10	0440	9821	70	0104	9965			
12	0422	9830	72	0099	9967			
14	0404	9838	74	0993	9969			
16	0387	9846	76	0088	9971			
18	0371	9854	78	0084	9973			

A Student-féle t eloszlás kritikus értékei

∞ / f	50%	25%	10%	5%	2%	1%	0,2%	0,1%	kétoldali
1	1,000	2,41	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0	
2	.816	1,60	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6	
3	.765	1,42	2,35	3,10	4,54	5,84	10,22	12,9	
4	.741	1,34	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61	
5	.727	1,30	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86	
6	.718	1,27	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96	
7	.711	1,25	1,69	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40	
8	.706	1,24	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04	
9	.703	1,23	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78	
10	.700	1,22	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59	
11	.697	1,21	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44	
12	.695	1,21	1,78	2,18	2,68	3,05	3,92	4,32	
13	.694	1,20	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22	
14	.692	1,20	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14	
15	.691	1,20	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07	
16	.690	1,19	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96	
17	.689	1,19	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96	
18	.688	1,19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92	
19	.688	1,19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88	
20	.687	1,18	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85	
21	.686	1,18	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82	
22	.686	1,18	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79	
23	.685	1,18	1,71	2,06	2,59	2,80	3,49	3,77	
24	.685	1,18	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74	
25	.684	1,18	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72	
26	.684	1,18	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71	
27	.684	1,18	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69	
28	.683	1,17	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67	
29	.683	1,17	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66	
30	.683	1,17	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65	
40	.681	1,17	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55	
60	.679	1,16	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46	
120	.677	1,16	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37	
∞	.675	1,15	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29	
f / ∞	25%	12,5%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%	158 egyoldali

$\alpha = 10\%$

Az F felosztás táblázata

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,7	61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,8	63,1	63,3
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,82	3,79	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,32	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,90
13	3,14	2,76	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,78	1,72	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49
28	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47
30	2,88	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,60	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19
	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00

A számláló szabadságfoka: f_1; A nevező szabadságfoka: f_2

$\alpha = 5\%$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
	A számláló szabadságfoka																		
1	161	200	216	225	230	234	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,65	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,23	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

A nevező szabadságfoka

α = 2,5%

III. táblázat (folytatás)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
	A számláló szabadságfoka																		
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1000	1010	1010	1010	1020
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,3	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

A számláló szabadságfoka

α = 1%

f_2 \ f_1	A számláló szabadságfoka																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	4050	5000	5400	5620	5760	5860	5930	5980	6020	6060	6110	6160	6210	6230	6260	6290	6310	6340	6370
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,3	27,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,3	11,0	10,7	10,5	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	9,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,45	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,26	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

A nevező szabadságfoka

$\alpha = 0,5\%$

f_2 \ f_1 (A nevező szabadságfoka \ A számláló szabadságfoka)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	16200	20000	21600	22500	23100	23400	23700	23900	24100	24200	24400	24600	24800	24900	25000	25100	25300	25400	25500
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
3	55,6	49,8	47,5	46,2	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,4	43,1	42,8	42,6	42,5	42,3	42,1	42,1	42,0	41,8
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,2	21,0	20,7	20,4	20,2	20,0	19,9	19,8	19,6	19,5	19,3
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,1	12,9	12,8	12,7	12,5	12,4	12,3	12,1
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,1	10,0	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	9,00	8,88
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,19	7,08
8	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	6,06	5,95
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,03	5,83	5,72	5,62	5,52	5,41	5,30	5,19
10	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,66	5,47	5,27	5,07	5,07	4,97	4,86	4,75	4,64
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,44	4,34	4,23
12	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	4,01	3,90
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,76	3,65
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,55	3,44
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,37	3,26
16	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,22	3,11
17	10,4	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	3,10	2,98
18	10,2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,99	2,87
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,89	2,78
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,81	2,69
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73	2,61
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,66	2,55
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,60	2,48
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,55	2,43
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,50	2,38
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60	3,49	3,33	3,15	2,97	2,87	2,77	2,67	2,56	2,45	2,33
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56	3,45	3,28	3,11	2,93	2,83	2,73	2,63	2,52	2,41	2,29
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52	3,41	3,25	3,07	2,89	2,79	2,69	2,59	2,48	2,37	2,25
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48	3,38	3,21	3,04	2,86	2,76	2,66	2,56	2,45	2,33	2,21
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,30	2,18
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	2,06	1,93
60	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,83	1,69
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,61	1,43
	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,36	1,00

f \ α	99,0%	97,5%	95%	90%	70%	50%	30%	10%	5%	2,5%	1%	0,1%
1	0,03157	0,03982	0,02393	0,0158	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	5,	6,62	10,8
2	0,0201	0,0506	0,102	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	0,115	0,216	0,352	0,854	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	0,554	0,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,5	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,3	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
11	3,05	3,82	4,57	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	21,9	24,7	31,3
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,9
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	24,7	27,7	34,5
14	4,66	5,63	6, 7	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	27,5	30,6	37,7
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
17	6,41	7,56	8,67	10,1	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	30,2	33,4	40,8
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
19	7,63	8,91	10,1	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	32,9	36,2	43,8
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3
21	8,90	10,3	11,6	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	35,5	38,9	46,8
22	9,54	11,0	12,3	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	36,8	40,3	48,3
23	10,2	11,7	13,1	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	38,1	41,6	49,7
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	39,4	43,0	51,-
25	11,5	13,1	14,6	16,5	20,9	24,3	27,2	34,4	37,7	40,6	44,3	
26	12,2	13,8	15,4	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	41,9	45,6	
27	12,9	14,6	16,2	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	43,2	47,0	
28	13,6	15,3	16,9	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	44,5	48,3	
29	14,3	16,0	17,7	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	45,7	49,6	
30	15,0	16,8	18,5	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	47,0	50,9	
40	22,2	24,4	26,5	29,1	34,9	39,3	44,2	51,8	55,8	59,3	63,7	
50	29,7	32,4	34,8	37,7	44,3	49,3	54,7	63,2	67,5	71,4	76,2	
60	37,5	40,5	43,2	46,5	53,8	59,3	65,2	74,4	79,1	83,3	88,4	
70	45,4	48,8	51,7	55,3	63,3	69,1	75,1	85,5	95,5	95,5	100,4	
80	53,5	57,2	60,4	64,3	72,9	79,3	86,1	96,6	101,9	106,6	112,3	
90	61,8	65,6	69,1	73,3	82,5	89,3	96,5	107,6	113,1	118,1	124,1	
100	70,1	74,2	77,9	82,4	92,1	99,3	106,9	118,5	124,3	129,6	135,8	

A legnagyobb variancia-hányados (maximális F) táblázata

f \ h	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
					p = 5%						
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	104	114	124
4	9,60	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,0	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,2	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,30	2,33	2,36	2,36
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
					p = 1%						
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23,2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15,5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12,1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,50	9,9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	19,8	21	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16,0	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6,0	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8,0
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3,0	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
∞	1,00	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

VI. táblázat

A Spearman-féle rangkorrelációs együttható (R) táblázata

n	Valószinüségek 0,10	0,05	0,02	0,01
5	0,9000	1,0000	1,0000	-
6	0,8286	0,8857	0,9429	1,0000
7	0,7143	0,7857	0,8939	0,9286
8	0,6429	0,7381	0,8333	0,8810
9	0,6000	0,6833	0,7833	0,8333
10	0,5636	0,6485	0,7333	0,7939
11	0,5273	0,6182	0,7000	0,7545
12	0,5035	0,5874	0,6713	0,7203
13	0,4835	0,5604	0,6429	0,6923
14	0,4637	0,5385	0,6176	0,6703
15	0,4464	0,5179	0,5964	0,6500
16	0,4294	0,5000	0,5765	0,6294
17	0,4142	0,4853	0,5588	0,6103
18	0,4014	0,4716	0,5418	0,5934
19	0,3895	0,4579	0,5281	0,5772
20	0,3789	0,4451	0,5158	0,5624
21	0,3688	0,4338	0,5039	0,5481
22	0,3595	0,4229	0,4929	0,5359
23	0,3508	0,4140	0,4822	0,5247
24	0,3435	0,4052	0,4722	0,5148
25	0,3362	0,3969	0,4631	0,5054
26	0,3295	0,3889	0,4539	0,4962
27	0,3230	0,3810	0,3351	0,4872
28	0,3169	0,3738	0,4373	0,4789
29	0,3113	0,3670	0,4300	0,4709
30	0,3059	0,3606	0,4229	0,4630

VII. táblázat

Kritikus küszöbszámok (S) a Kendall-féle egyetértési együttható $W = \frac{S}{S_{max}}$ szignifikanciavizsgálatához

(Ha $S_{sz} < S_{krit}$, akkor szignifikáns egyetértés van a rangsorolók között.)

k	n=3	
	α=0,05	α=0,01
3		
4		
5		
6		
8	48,1	66,8
9	54,0	75,9
10	60,0	85,1
12	71,9	103,5
14	83,8	121,9
15	89,8	131,0
16	95,8	140,2
18	107,7	158,6
20	119,7	177,0

k	n			
	4	5	6	7
	α = 0,05 szint			
3		64,4	103,9	157,3
4	49,5	88,4	143,3	217,0
5	62,6	112,3	182,4	276,2
6	75,7	136,1	221,4	335,2
8	101,7	183,7	299,0	354,1
10	127,8	231,2	376,7	571,0
15	192,9	349,8	570,5	864,9
20	258,0	468,5	764,4	1158,7
	α = 0,01 szint			
3		75,6	122,8	185,6
4	61,4	109,3	176,2	265,0
5	80,5	142,8	229,4	343,8
6	99,5	176,1	282,4	422,6
8	137,4	242,7	388,3	579,9
10	175,3	309,1	494,0	737,0
15	269,8	475,2	758,2	1129,5
20	364,2	641,2	1022,2	1521,9

VIII. táblázat

A korrelációs együttható valószinüségi szintjei (r)

f	Valószinüségek 0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,98769	0,99692	0,999507	0,999877	0,9999988
2	,90000	,95000	,98000	,990000	,99900
3	,8054	,8783	,93433	,95873	,99116
4	,7293	,8114	,8822	,91720	,97406
5	,6694	,7545	,8239	,8745	,95074
6	,6215	,7067	,7887	,8343	,92493
7	,5822	,6664	,7498	,7977	,8982
8	,5494	,6319	,7155	,7646	,8721
9	,5214	,6021	,6851	,7348	,8471
10	,4973	,5760	,6581	,7079	,8233
11	,4762	,5529	,6339	,6835	,8010
12	,4575	,5324	,6120	,6614	,7800
13	,4409	,5139	,5923	,6411	,7603
14	,4259	,4973	,5742	,6226	,7420
15	,4124	,4821	,5577	,6055	,7246
16	,4000	,4683	,5425	,5897	,7084
17	,3887	,4555	,5285	,5751	,6932
18	,3783	,4438	,5155	,5614	,6787
19	,3687	,4329	,5034	,5487	,6652
20	,3598	,4227	,4921	,5368	,6524
25	,3233	,3809	,4451	,4869	,5974
30	,2960	,3494	,4093	,4487	,5541
35	,2746	,3246	,3810	,4182	,5189
40	,2573	,3044	,3578	,3932	,4896
45	,2428	,2875	,3384	,3721	,4648
50	,2306	,2732	,3218	,3541	,4433
60	,2108	,2500	,2948	,3248	,4078
70	,1954	,2319	,2737	,3017	,3799
80	,1829	,2172	,2565	,2830	,3568
90	,1726	,2050	,2422	,2673	,3375
100	,1638	,1946	,2301	,2540	,3211

4. MELLÉKLET

Szüts István

A VALÓSZINŰSÉGELMÉLET ALAPGONDOLATAI

- Programozott tanulmány -

Lektorálta: Dr. Kindler József

Budapest, 1973

A valószinüségszámitást az utóbbi két évtized során világszerte ujabb és ujabb tudományágakban alkalmazták. A termelés és elosztás problémáinak vizsgálatában és megoldásában is egyre gyakrabban használják módszerként. Igy helyet kap a vezetői döntéshozatalban és a termelő rendszerek elemzésében is. E tanulmányban megismerkedünk a valószinüségelmélet alapgondolataival, igy a valószinüség fogalmával, a valószinüség számértékének mérésével, egyes jellegzetes értékeivel, valamint kiszámitásának egyes módjaival.

A tudomány egyik fontos feladata, hogy a külvilág bonyolultsága közepette törvényeket tárjon fel, azaz, hogy bonyolult természeti és társadalmi jelenségeket alapvető elvek segitségével magyarázzon meg. Ezen törvények kapcsán okokról és okozatokról beszélünk. Vizsgálódásaink során kisérleteket végzünk. A kisérlet fogalmát legáltalánosabban értelmezzük, azaz kisérletnek nevezzük valamilyen természeti jelenség megfigyelését. Valamely kisérlet eredményeit (kimeneteleit) eseményeknek nevezzük. Valamilyen esemény egy vagy több ok hatására következik be. Egy meghatározott eseményt létrehozó okok száma igen nagy lehet, sőt ez általában igy is van. Például egy poliamid szál szakitószilárdságát számot tényező befolyásolja, ugymint a receptura az autokláv hőmérséklet és nyomás, a nitrogénáram, az elszivás paramétereinek változása stb.

Ha teljes mértékben meg tudjuk ismerni az eseményt létrehozó okozati rendszert, akkor a létrehozó okok és az okozat, esemény között determinisztikus, meghatározó kapcsolatról beszélünk. Ha azonban a szóbanforgó okok nagy száma vagy egyéb ok miatt ezt nem áll módunkban megtenni, akkor a bekövetkező eseményt véletlen eseménynek nevezzük, s az ok illetve okozat között sztochasztikus, véletlenszerű kapcsolatról beszélünk. Pontosabban megfogalmazva. Véletlennek nevezzük valamilyen jelenség lefolyásában azoknak az okoknak az összességét, amelyet nem ismerünk pontosan és hatásukat sem méréssel sem következtetéssel nem tudjuk megállapitani.

Azt a jelenséget, amelynek lefolyását az adott körülmények között biztosan nem látjuk előre (a meghatározó okok bonyolult láncolata miatt) - véletlen jelenségnek nevezzük.

Ez nem jelenti azt azonban, hogy vizsgálódásaink köréből ezen jelenségeket ki kell hagynunk.

A véletlen ellentéte a szükségszerü. Szükségszerünek nevezzük azt, ami bizonyos körülmények között feltétlenül bekövetkezik, tekintet nélkül arra, hogy egyéb - figyelembe nem vett - mellékkörülmények hogyan alakulnak. Szükségszerü, például, hogy minden rádiumatom előbb vagy utóbb elbomoljék, a véletlentől függ azonban, hogy egy bizonyos atomnál ez mikor következik be.

Vizsgáljuk meg a következő példát:

Egy izzólámpa-tétel átvételéről kell dönteni. A tétel többezer darabból áll. Az átvételi előírás az izzólámpák átlagos élettartamát rögziti, és az egyszerüség kedvéért a tételt csak ebből a szempontból kell tekinteni. Megfelelőnek minősül a tétel, ha az izzók átlagos élettartama legalább x_1, nem megfelelő a tétel, ha az átlagos élettartam x_1 -nél kisebb.

Megismerhetjük-e jelen esetben az izzók átlagos élettartamát létrehozó okozati rendszert?

a) igen

b) nem

Sajnos valóban nem áll módunkban azt teljes mértékben megismerni, hiszen ahhoz a gyártási körülmények olyan pontos és mélyreható ismerete lenne szükséges, amely kiterjed az élettartamot befolyásoló összes, igen nagy számu, ható ok pontos kvantitativ leírására. További problémát okoz, hogy ezt, mint jelen esetben is, utólagosan kellene elvégezni. Mégha mindezek lehetetlenségében kételkednénk is, abban megegyezhetünk, hogy ezt semmiképpen sem volna célszerü elvégezni, hiszen az eszközölt ráforditást nem ellensulyozná a kapott információ értéke.

Más módszerrel kellene tehát a problémát kezelnünk. Tekintsük a tétel megfelelő, vagy nem megfelelő voltát véletlen eseménynek, s próbáljuk ezen események bekövetkezésének esélyét, valószinüségét megállapitani. Ha Ön az átvételben járatos szakember, akkor milyen módszert választana az alábbiak közül?

a) Eddigi tapasztalataim alapján becsülném.
b) Mintát venném, és azt megvizsgálnám.
c) Becsülném és és minta alapján vizsgálnám is.
d) A teljes tételt megvizsgálnám.
e) A feltételektől függően a;b,c pontokban felsoroltak közül választanék.

Talán az válaszolt leghelyesebben, aki az e) pontot választotta. Egyet azonban le kell szögeznünk: a teljes tételt nem vizsgálhatjuk meg élettartam szempontjából. Ez azt is jelenti egyuttal, hogy teljes információ birtokába nem juthatunk. Az a), b), c) pontokban megfogalmazott válaszok tulajdonképpen a problémával kapcsolatban az információ mértékére vonatkozó igényünkre jellemzőek. S ez az, ami a feltételektől függ, hogy az adott példában milyen biztonsággal kivánunk dönteni. A fentiek alapján két megállapitást leszögezhetünk:

Általában részleges információ alapján döntünk. Pontosabb információ több ráforditást igényel.

Az eddigiekben kifejtettekből és személyes tapasztalatunkból láthatjuk, hogy a társadalmi és gazdasági élet területén számos olyan problémával találkozhatunk, amelyekben az eseményeket nagy számu ható ok hozza létre, és ezeket a ható okokat nincs módunkban pontosan megismerni. Ezért kénytelenek vagyunk véletlen eseményeknek tekinteni azokat és részleges információ alapján bekövetkezésükhöz esélyeket, valószinüségeket rendelni.

Valószinüségelméleti alapgondolatainkat ezen tanulmány kapcsán kis kézzelfogható példákon fejtjük ki. Ugyancsak hasonló példák segitségével mutatjuk be a valószinüségszámitás egyszerübb összefüggéseit is. A további tanulmányok feladata az ismeretekkel felvértezett vezető számára bemutatni a gazdasági alkalmazásokat.

A VALÓSZINŰSÉG FOGALMA

Ha öt egyforma korongot 1-től 5-ig megszámozunk és egy dobozban helyezünk el, s utána egy korong kihuzását tervezzük, a 3-as korong kihuzásának valószinüsége:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

A következtetés során, amellyel meghatározta a 3-as korong kihuzásának $\frac{1}{5}$-ös valószinüségét, Ön feltételezésekkel élt, és a valószinüségszámitás klasszikus megközelitésével egyező számitást alkalmazott. Az egyik feltételezés az volt, hogy az öt lehetséges esemény kölcsönösen kizárja egymást, ugyanis bármelyik korong kihuzása esetén csak

a) egy
b) több

meghatározott esemény következhet be.

Igy feltételezésünknél fogva, azaz, hogy a <u>lehetséges események kölcsönösen kizárják egymást</u>, egy huzás esetén két korong kihuzása

a) lehetséges

b) nem lehetséges.

Tehát egy korong kihuzása egy meghatározott esemény bekövetkezését jelenti, és ez fordítva is igaz.

A másik feltételezés, amellyel élt, hogy az egyes változatok egyaránt valószinüen következnek be. Például hinné-e Ön, hogy a 3-as korong kiválasztásának $\frac{1}{5}$ a valószinüsége, ha észrevette, hogy az fele akkora nagyságu, mint a többi?

a) igen

b) nem

Természetesen nem, hiszen így a 3-as korong könnyen megkülönböztethető lenne a többitől.

Végül Ön kiszámolt egy törtet, amely a valószinüség értékét reprezentálja:

a) $\dfrac{\text{kedvező események száma}}{\text{összes lehetséges események száma}}$

b) $\dfrac{\text{összes lehetséges események száma}}{\text{kedvező események száma}}$

A számitás a következő volt:

$$\frac{\text{kedvező események száma}}{\text{összes lehetséges események száma}}$$

Tegyük fel például, hogy az öt korongot a következőképpen számoztuk meg: 1, 1, 1, 3, 3. Ebben az esetben egy 3-as korong kihuzásának valószinüsége:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

Egy 3-as korong kihuzásának valószinüsége $\frac{2}{5}$. A két feltételezés, amelyet a valószinüséget mérő szám meghatározásánál tettünk az az, hogy az öt korong közül bármelyik kiválasztása is egymást kölcsönösen kizáró események és bekövetkezési valószinüségük egyenlő.

Igy a fentiek alapján a valószinüséget mérő szám kiszámitásának egyik megközelitése a következő: Ha egy kisérletnek n egymást kölcsönösen kizáró és egyaránt valószinü kimenetele van, akkor egy x-el jelölt kimenetel (esemény) valószinüségét a következő tört értéke határozza meg: $\frac{f_x}{n}$, ahol f_x az x esemény bekövetkezésének száma, n pedig az összes lehetséges kimenetel (esemény) száma. A valószinüség érték számitása megelőzi a kisérlet lefolytatását. Ez a valószinüségszámitás klasszikus megközelitésének megállapitása.

Ha egy pénzérmét feldobunk, akkor két, egymást kölcsönösen kizáró és egyaránt valószinü esemény következhet be: a pénzérme fej vagy irás oldalára eshet. A fejdobás valószinüségét a következő tört jellemzi:

$$\frac{f_x}{n} = \quad a) \ \frac{3}{4}$$

$$b) \ \frac{1}{2}$$

$$c) \ \frac{4}{5}$$

A fejdobás valószinüsége:

$$\frac{f_x}{n} = \frac{1}{2}$$

Ha egy kártyacsomagban 52 kártya van, akkor a pikk ász kihuzásának valószinüsége egy kártya választásával:

$$\frac{f_x}{n} = \quad a)\ \frac{13}{52}$$

$$b)\ \frac{1}{4}$$

$$c)\ \frac{1}{52}$$

A pikk ász kihuzásának valószinüsége:

$$\frac{f_x}{n} = \frac{1}{52}$$

Egy pikk lap kihuzásának valószinüsége egyszeri huzással:

$$\frac{f_x}{n} = \quad a)\ \frac{1}{52}$$

$$b)\ \frac{13}{52}$$

$$c)\ \frac{1}{4}$$

Számos döntési helyzetben azonban a gazdasági és kereskedelmi adatok következményeképpen, az alternativ események nem egyaránt valószinüek, és a megfelelő valószinüségek előre nem ismertek. Ezek a tények korlátozzák tehát bonyolultabb esetekben a valószinüségszámitás klasszikus megközelitésének használhatóságát.

Egy pikk lap kihuzásának valószinüsége:

$$\frac{f_x}{n} = \frac{\text{kedvező események száma}}{\text{összes lehetséges események száma}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

A valószinüségszámitás klasszikus megközelitése eleve meghatározott arányt tételez fel a kisérlet lehetséges kimenetelei között. Csak ezen feltételezés alapján lehetséges a kisérlet megfigyelése nélkül meghatározni az egyes valószinüségeket.

A valószinüségszámitás másik megközelitése az események relativ gyakoriságának megfigyelésén alapul. Igy definició szerint: egy esemény (kimenetel) valószinüsége egyenlő nagyszámu kisérlet alapján megfigyelt bekövetkezésének

a) gyakoriságával
b) relativ gyakoriságával
c) valószinüségével.

Egy esemény valószinüsége egyenlő nagyszámu kisérlet alapján megfigyelt bekövetkezésének relativ gyakoriságával.

Tehát szembeállitva a klasszikus megközelitéssel, amely feltételezések alapján előre meghatározza a valószinüséget, a valószinüségszámitás relativ gyakoriság megközelitése a megismételt kisérlet tényleges megfigyelésén alapul.

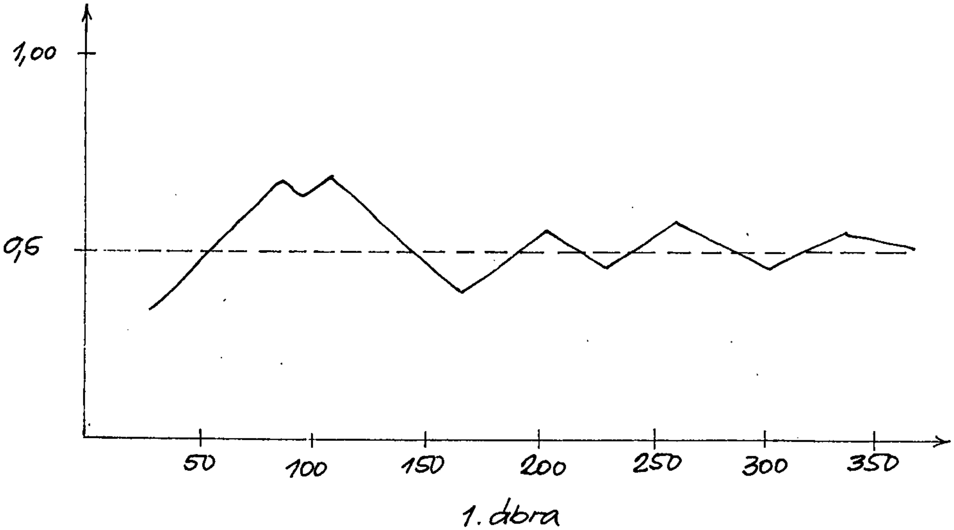
A valószinüségszámitás relativ gyakoriság megközelitésének használata esetén, ha a kisérlet, illetve a megfigyelések számát növeljük, a megfigyelésekre alapozott valószinüség érték pontossága

a) nő
b) nem változik
c) csökken

A valószinüség érték pontossága nő a megfigyelések számának növelésével. Ahogyan a megfigyelések száma növekszik, ugy válik egyre kisebbé a relativ gyakoriság ingadozása. Az 1.ábrán egy érme 300-szori feldobása alapján ábrázoltuk a fejdobások megfigyelt relativ gyakoriságát. Ahogyan nő a feldobások száma, ugy csökken a relativ gyakoriság ingadozása, és közelíti meg a

a) 0,2 b) 0,3 c) 0,5

értéket.


1,00
0,5
50
100
150
200
250
300
350
1. ábra

Megjegyzés: Azt állitottuk, hogy a relativ gyakoriság egyre jobban közeliti meg a 0,5 értéket a kisérletek számának növelésével. A valószinüségszámitás relativ gyakoriság definiciójával kapcsolatosan egy probléma a következő: a véges számu megfigyelés alapján számitott valószinüség értéket mindig pontosithatjuk további megfigyeléssel. Igy a valószinüség érték, amelyet a megfigyelt relativ gyakoriságra alapozunk változatlanul

a) pontos

b) becsült

érték.

A relativ gyakoriság alapján számitott valószinüség érték mindig becsült marad.

Másrészről viszont, ha nem tételezhetjük fel, hogy minden lehetséges esemény egyaránt valószinü, akkor a legfontosabb felhasználható módszer a valószinüség értékének számitására a relativ gyakoriság meghatározása.

A valószinüség értékeket az eddigiekben megismertek szerint tehát kétféle módszerrel határozhatjuk meg, a klasszikus módszerrel és relativ gyakoriság meghatározásának módszerével. Ez a két módszer két jól elkülönithető megközelitést reprezentál a valószinüségszámitás területén. A két módszer nem vezet lényegesen különböző valószinüség értékekhez, de lényegesen különbözik a valószinüség számitásának módjában. A valószinüségszámitás klasszikus megközelitése egy eleve meghatározott valószinüséget tételez fel, a valószinüség érték számitása megelőzi bármilyen kisérlet megfigyelését. A relativ gyakoriság meghatározásának módszere viszont azon alapul, hogy nagyszámu kisérlet kimeneteleinek megfigyelése alapján határozzák meg a valószinüség értékeket.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI

A valószinüség jelölésére a P betüt használjuk, zárójelbe téve annak az eseménynek a jelölését, amelyre vonatkozik. Igy P(A) az A esemény bekövetkezésének valószinüségét fejezi ki.

Bármelyik megközelitésből is vizsgáljuk (klasszikus, relativ gyakoriság megközelitésből); mi a véleménye, mi az a legkisebb érték, amelyet a valószinüség számértéke felvehet? (Gondoljon a legkisebb lehetőség számértékére, amelyet a várt vagy megfigyelt relativ gyakoriság felvehet.)

a) 0,1

b) 10^{-10}

c) 0

A valószinüség 0 számértéke azt jelenti, hogy

a) lehetetlen
b) kicsi
c) nagy

az esélye a kérdéses esemény bekövetkezésének.

A valószinüség 0 számértéke azt jelenti, hogy lehetetlen az esemény bekövetkezése.

<u>Megjegyzés:</u> Ha a valószinüség számértéke a relativ gyakoriság alapján való megközelitésből származik, az inkább becslés, mint pontos számérték. Igy a 0 számértékü valószinüség jelentheti, hogy az esemény bekövetkezése rendkivül valószinütlen, mindazonáltal nem szükségképpen lehetetlen, mivel megfigyelésünk pontatlansága következményeként rendeltük a 0 valószinüség értéket az igen kis eséllyel bekövetkező eseményhez.

Lehet-e a valószinüség számértéke negativ?

a) igen

b) nem

A valószinüség számértéke negativ nem lehet. Mi a valószinüség lehetséges legnagyobb számértéke? (Vagy másként, mi a maximális értéke annak a törtnek, amely a várt, vagy megfigyelt relativ gyakoriságot képviseli?)

a) 0,999
b) 1,000
c) 1,001

A valószinüség lehetséges legnagyobb számértéke 1,000 .

Megjegyzés: Ismételten, ha a relativ gyakoriság megközelitést használtuk P értékének számitásakor, az 1-es valószinüség érték jelentheti, hogy ritka kivétel lehetséges, tehát a kérdéses esemény bekövetkezése jórészt, de nem szükségképpen teljesen biztos.

Igy P lehetséges legkisebb értéke 0, azt jelzi, hogy a kérdéses esemény bekövetkezése lehetetlen, biztos bekövetkezést jelez a valószinüség 1-es értéke.

Előfordulhat, hogy a valószinüség számértékét nem a megismert módon adják meg, hanem egy számarány segitségével. Igy pld. a 3:2 arány azt jelenti, hogy három kedvező eseménnyel

a) 2;   b) 3;   c) 1

kedvezőtlen esemény jár együtt.

Három kedvező eseménnyel két kedvezőtlen jár együtt, ha a számarány 3:2 .

Tehát, ha számarányt használunk a valószinüség megjelölésére, a lehetséges kimenetelek arányát a következő formában adjuk meg:

a) kedvező : kedvezőtlen

b) kedvezőtlen : kedvező

c) kedvező : összes

A megadás módja:

a) kedvező : kedvezőtlen.

Például kockajátékban 6-os dobásának valószinüsége számarénnyal jelezve:

a) 1:6
b) 6:1
c) 1:5

6-os dobásának valószinüsége számaránnyal jellemezve:

kedvező : kedvezőtlen = 1 : 5

Az előzőhöz hasonlóan egy pénzérme fej dobásának valószinüsége, mellőzve az élre esés lehetőségét

a) 1:2 ; b) 2:1 ; c) 1:1

számaránnyal jellemezhető.

Egy pénzérme fej dobásának valószinüsége számaránnyal jellemezve: 1:1.

Mig a számarány a kedvező és kedvezőtlen események arányát mutatja, a valószinüség a kedvező és az összes kimenetelek arányát képviseli. Igy ha bármelyiket ismerjük a kettő közül, a másikat kiszámithatjuk. Számitsuk ki a kedvező kimenetel valószinüségét 1:5 számarány esetén!

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{1}$

c) $\frac{1}{6}$

1:5 számarány esetén a kedvező kimenetel valószinüsége

$$\frac{1}{6}.$$

Hasonlóan a 3:2 arány szerint meghatározott bekövetkezés kedvező és kedvezőtlen események valószinüsége sorrendben

a) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$

A $3:2$ számaránnyal meghatározott kedvező kimenetel valószinüsége $\frac{3}{5}$, a kedvezőtlen kimenetelé pedig $\frac{2}{5}$. Ellenkező esetben, ha a kedvező esemény valószinüsége adott $\frac{1}{3}$, az események bekövetkezése jellemezhető az

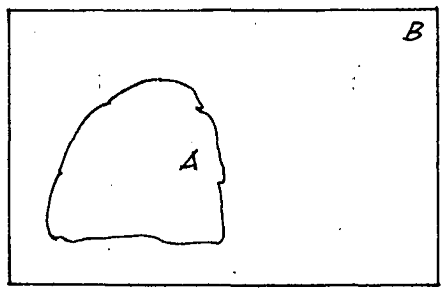
a) $1:3$; b) $1:2$

számaránnyal.

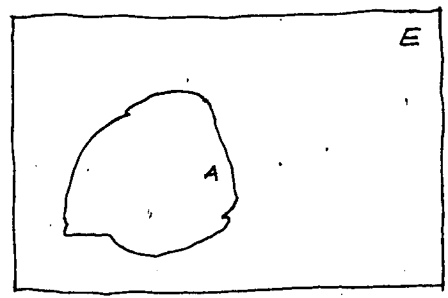
Ha a kedvező esemény valószinüsége $\frac{1}{3}$, a bekövetkezés jellemezhető az 1:2 számaránnyal.

Egy kisérlet kimeneteleit, azaz az eseményeket, valamint az így keletkező valószinüségi helyzeteket szemléletesen ábrázolhatjuk Venn-diagramok segitségével. A Venn-diagramban körülhatárolt területeket feleltetünk meg az egyes eseményeknek. A Venn-diagram teljes területe egy kisérletre vonatkozóan az összes lehetséges kimenetelt (eseményt) ábrázolja.

A 2.ábrán egy Venn-diagramot ábrázoltunk. A körülhatárolt terület A esemény bekövetkezését reprezentálja, a terület nagysága azonban nem szükségképpen jellemzi A esemény bekövetkezésének valószínüségét. Az A esemény nem bekövetkezését a diagramban a bekeritetten (A -n) kivüli terület reprezentálja.



2.ábra Venn-diagram



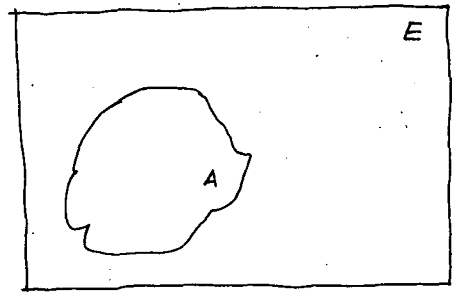
2. ábra Venn-diagram

A Venn-diagram teljes területét teljes eseménytérnek nevezzük és E-vel jelöljük. Ha az A területen belül kijelölünk egy pontot, ez azt jelenti, hogy A esemény bekövetkezett. Ha a területen kivül; az azt jelenti, hogy A esemény

a) bekövetkezett;

b) nem következett be,

azaz $\bar{A}$ esemény (olvasd: nem A, non A) következett be.



2.ábra Venn-diagram

P(A) jelenti A esemény bekövetkezésének valószinü-ségét, P($\bar{A}$) pedig

a) A ; b) $\bar{A}$

bekövetkezésének valószinüségét.

$P(\bar{A})$ a nem A esemény $(\bar{A})$ bekövetkezésének valószínűségét jelenti.

Ha egy pénzérme feldobása esetén A esemény jelenti a fejdobást, akkor $\bar{A}$ esemény

a) fej ; b) nem fej

dobást jelenti. Esetünkben mivel csak két kimenetel lehetséges $\bar{A}$ egyúttal az írásdobást is jelenti.

Az előzőeknek megfelelően $P(A)$ a fejdobás valószinüségét jelenti, $P(\bar{A})$ pedig

a) fejdobás; b) irásdobás

valószinüségét jelenti.

Mivel csak két esemény lehetséges, vagy fejet, vagy írást dobhatunk, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, ez másként azt is jelenti, hogy a két esemény közül egyik biztosan be fog következni egy pénzérme feldobása esetén.

A pénzfeldobás esetében tehát két eseményből áll a teljes eseménytér. Egy kockadobás esetén a teljes eseménytér

a) 2 ; b) 6

eseményből áll, mivel egy kocka feldobása esetén összesen hat kimenetel lehetséges.

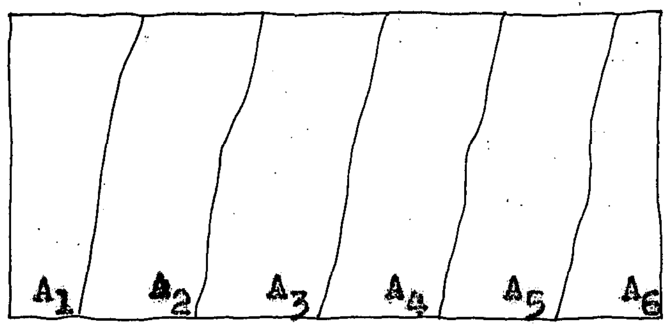
A pénzfeldobás kimenetelei, vagy a kockadobás kimenetelei teljes eseményrendszert alkotnak. A teljes eseményrendszer definició szerint a következő. Ha egy kisérlet lehetséges kimenetelei egymást kölcsönösen kizárják, de valamelyikük biztosan bekövetkezik, akkor ezen kimenetelek teljes eseményrendszert alkotnak. Ebből következik, hogy a teljes eseményrendszert alkotó események valószinüségeinek összege 1-gyel egyenlő. Jelöléssel felirva

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Ábrázoljuk egy kockadobás lehetséges hat kimenetelét Venn-diagrammban! (Jelöljük a hat eseményt a következőképpen: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.)

(Egy külön papirra rajzolja fel!)

Az ábra a következő:



3.ábra. Egy kockadobás kimenetelei Venn-diagramban ábrázolva.

<u>Összegezve:</u>

Egy X-el jelölt esemény valószinüségét P(X) reprezentálja. A valószinüség legkisebb lehetséges számértéke 0, lehetséges legnagyobb számértéke 1.

Ha egy kedvező esemény jellemzésére a 4:5 számarányt használjuk, ez a következő valószinüség értékét jelenti:

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9}$

A 4:5 számaránnyal jellemzett kedvező esemény bekövetkezésének valószinüsége $\frac{4}{9}$.
Az X-el jelölt esemény bekövetkezésének valószinüsége P(X), a nem X esemény bekövetkezésének valószinüsége P($\bar{X}$) a kettő összege egyenlő 1. A teljes eseményrendszert alkotó események valószinüségeinek összege (jelöléssel $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$) szintén egyenlő 1-gyel.
Egy kockadobás esetén ezen események száma hat, tehát n = 6. Részletesen felirva tehát

$$\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \quad + P(A_6) = \begin{array}{l} a) = 1 \\ b) = 6 \end{array}$$

(Egészitse ki fejben!)

Helyesen kiegészitve:

$$\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$$

Ebben a részben megismertük a valószinüségszámitás jelölésrendszerét, valamint azt, hogy a valószinüség milyen számszerü értékeket vehet fel. Ezenkivül bevezettük a Venn-diagramokat a kisérlet lehetséges kimeneteleinek, azaz eseményeknek az ábrázolására.

EGYMÁST KIZÁRÓ ESEMÉNYEK

Egy kisérlet esetén, mint pl. egy kártyalap huzása egy kártyacsomagból, különféle kimenetelek (események) lehetségesek, ezek közül egyesek kölcsönösen kizárják egymást (nem következhetnek be egyidejüleg) mások nem. Két vagy több egymást kölcsönösen kizáró eseménytől beszélünk, ha bármelyik esemény bekövetkezése automatikusan kizárja a többi esemény bekövetkezését. Ezen feltétel fennállása fogja meghatározni a következőkben ismertetendő valószinüségszámitási szabály alkalmazását.

Egy pénzérme feldobása esetén a fej vagy irás dobás egymást kölcsönösen kizáró esemény.
Ha egy kártyacsomagból egy lapot huzunk, lehet-e az egyszerre ász és király?

a) igen b) nem .

Ebből következően ez a két lehetséges esemény kölcsönösen kizárja egymást.

Az előzőhöz hasonló feltételek mellett, lehet-e a kártya egyszerre ász és pikk?

a) igen　　　b) nem .

Ez a két esemény tehát nem zárja ki kölcsönösen egymást.

Ha A és B egymást kölcsönösen kizáró események, akkor A vagy B bekövetkezésének valószinüsége az egyes valószinüségek összege lesz. Jelöléssel:

$$P(A \text{ vagy } B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Ezzel az összeadási szabállyal összhangban egy fej vagy irás dobás valószinüsége egy pénzérme feldobása esetén (az élre esést kizárva vizsgálatainkból) $P(F) + P(I) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. 52 kártyalapból egy ász vagy egy király kihuzásának valószinüsége:

a) $\frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

b) $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

Egy ász vagy egy király kihuzásának valószinüsége:

$$\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

Természetesen az összeadási szabály abban az esetben is alkalmazható, ha nem két, hanem több egymást kölcsönösen kizáró kimenetel létezik. Nézzük meg az 1.táblázat adatait:

A gyermekek száma	0	1	2	3	4	5 vagy több
A családok megoszlása	0,10	0,10	0,20	0,25	0,20	0,15

1.táblázat. A családok gyermekek száma szerinti megoszlása valamely országban.

Mi a valószinüsége, hogy egy családnak 5 vagy annál több gyereke van, ha ebből az országból véletlenül választunk ki egy családot?

a) 0,15 ; b) 0,20

Természetesen 0,15 a valószinüsége, hogy egy családnak 5 vagy annál több gyermeke van.

A gyermekek száma	0	1	2	3	4	5 vagy több
A családok megoszlása	0,10	0,10	0,20	0,25	0,20	0,15

1.táblázat. A családok gyermekek száma szerinti megoszlása valamely országban.

Mi a valószinüsége, annak, hogy találomra választva egy családot, annak 3 vagy annál több gyermeke lesz? (T.i. 3 vagy 4 vagy 5 vagy több.)

a) 0,25

b) 0,45

c) 0,60

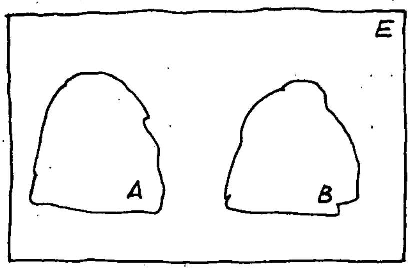
Egy családban 3 vagy annál több gyermek valószinüsége:

$$0,25 + 0,20 + 0,15 = 0,60$$

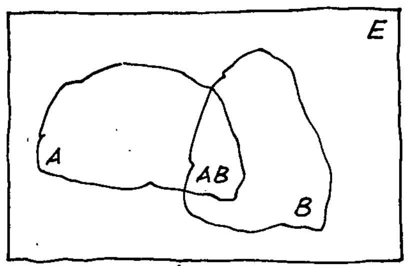
Ha A és B események egy kisérlet egymást kölcsönösen ki nem záró kimenetelei, akkor A vagy B bekövetkezésének valószinüségét a következőképpen számithatjuk. A bekövetkezésének valószinüségéhez hozzáadjuk B bekövetkezésének valószinüségét, s levonjuk az együttes bekövetkezés valószinüségét. Jelölve:

$$P(A \text{ vagy } B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Az együttes bekövetkezés levonásának racionalitása leginkább Venn-diagramon ábrázolható. A 4.a. illetve 4.b. ábrák közül melyik reprezentálja a kölcsönösen kizáró kimeneteleket?

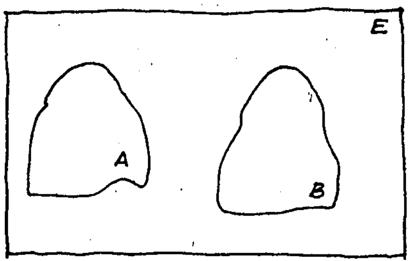


4.a. ábra

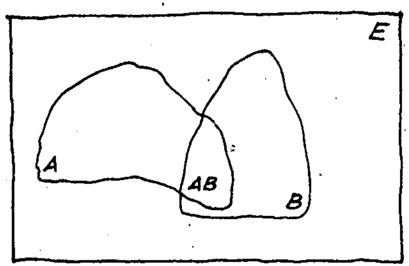


4.b. ábra

A kölcsönösen kizáró kimeneteleket a 4.a. ábra reprezentálja.



4.a. ábra



4.b. ábra

Nézzük a 4.b. ábrát. Az A vagy B esemény bekövetkezésének valószinüségét ugy számitjuk,hogy az A esemény bekövetkezésének valószinüségéhez hozzáadjuk B esemény bekövetkezésének valószinüségét. Milyen értéket adunk igy össze valójában kétszer:

a) A ; b) B ; c) AB (olvasd A és B).

AB (A és B) értékét adjuk valójában kétszer össze. Ebből adódóan az együttes bekövetkezés valószinüségének kivonása teszi helyessé az eredményt, amelyet két egymást kölcsönösen ki nem záró esemény esetén az átfedő terület szimbolizál. Igy az összefüggés mégegyszer:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

Az egymást kölcsönösen kizáró eseményekre vonatkozó összeadási szabály ugy tekinthető, mint az egymást kölcsönösen ki nem záró eseményekre vonatkozó összeadási szabály speciális esete. Ezt a Venn-diagramból is láthattuk (4.a. ábra), hogy a speciális esetben nincs átfedő terület, azaz $P(AB) = 0$.

Az összeadási szabály alkalmazásával számitsuk ki tehát, hogy mi a valószinüsége annak, hogy egy ász vagy egy pikk lapot huzunk egy 52 lapos kártyacsomagból?

a) $\frac{4}{13}$

b) $\frac{16}{52}$

c) $\frac{15}{52}$

A számítás helyesen:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

FÜGGETLEN ESEMÉNYEK, FELTÉTELES ESEMÉNY, FELTÉTELES VALÓSZINÜSÉG

Ha két vagy több kisérlet, jelenség időben és térben elhatárolt, ugymint két pénzérme feldobása vagy ugyanazon pénzérme egymásutáni kétszeri feldobása, akkor a kisérlet kimenetelei (események) lehetnek egymástól függetlenek, vagy függhetnek egymástól. Ha az események függetlenek egymástól, akkor a második (későbbi) esemény(ek) bekövetkezésének valószinüségei függetlenek a megelőző eseményektől. Ha az események függenek egymástól, akkor a későbbi esemény(ek) bekövetkezésének valószinüsége függ a megelőző esemény(ek) bekövetkezésétől. Ebben a részben független vagy egymástól függő feltételes eseményekre vonatkozó szorzási szabállyal ismerkedünk meg.

Nézzük meg azt az esetet, ha egy pénzérmét egymásután kétszer feldobunk. Befolyásolja-e a második dobás kimeneteleinek valószínüségét az, hogy az első dobás fej-dobás volt?

a) igen
b) nem.

Az előző dobás eredménye nyilvánvalóan nem befolyásolja a következő dobás eredményét, így a pénzérme kétszeri feldobása olyan eseményeket reprezentál, amelyek függetlenek egymástól.

A szorzási szabály azt állitja, hogy ha A és B két független esemény, az együttes bekövetkezés valószinüségét megkapjuk, ha a két esemény bekövetkezésének valószinüségét összeszorozzuk. Algebrai egyenlőséggel kifejezve a szabályt

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Igy két irásdobás valószinüsége két egymásutáni dobással:

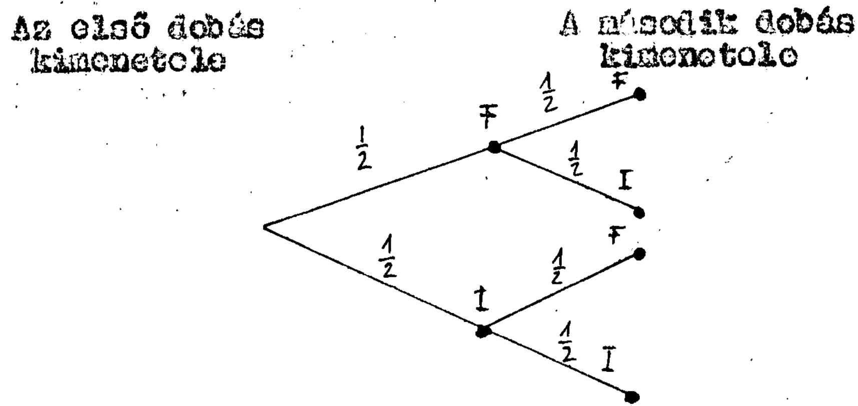
a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

A számítás helyesen:

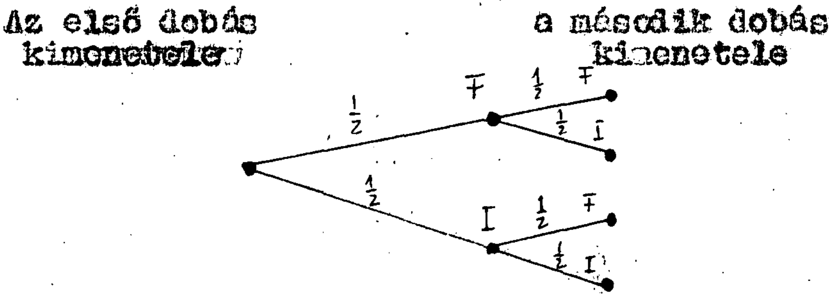
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Az egymásután bekövetkező, vagy párhuzamosan lezajló események szemléletes ábrázolására használhatók a fagráf diagramok. Az 5.ábrán a fagráf diagram ábrázolja egy pénzérme egymásután kétszeri feldobását.



5.ábra. Fagráf diagram egy pénzérme egymásután kétszeri feldobásának ábrázolására.

Bármilyen meghatározott esemény bekövetkezésének valószinüségét ugy számithatjuk, hogy az első kimenetel valószinüségét szorozzuk a második kimenetel valószinüségével, mint ahogyan az ábra mutatja. Számoljuk ki annak valószinüségét, az ábra segitségével, hogy először irást, majd fejet dobunk!



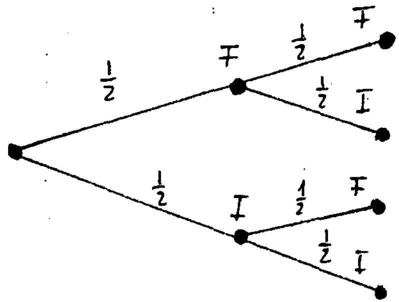
5.ábra. Fagráf diagram egy pénzérme egymás-után kétszeri feldobásának ábrázolására.

A számitás helyesen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Az ábra segitségével számoljuk ki, mi a valószinüsége, hogy először fejet, majd irást dobunk?

Az első dobás kimenetele

A második dobás kimenetele



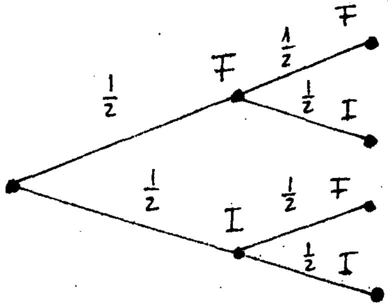
5.ábra. Fagráf diagram egy pénzérme egymásután kétszeri feldobásának ábrázolására.

A számítás helyesen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Az előzőeket figyelembe véve, mi a valószínűsége egy fej és egy írás dobásának bármilyen sorrendben?

Az első dobás kimenetele

A második dobás kimenetele



5.ábra. Fagráf diagram egy pénzérme egymásután kétszeri feldobásának ábrázolására.

A számitás helyesen: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

A szerencsejátékok kimenetelcitől eltérően a gazdasági és kereskedelmi életben az események ugyszolván sohasem függetlenek egymástól. Ha két esemény nem független egymástól, akkor a feltételes valószinüség fogalmát használjuk egy meghatározott kimenetel gyakoriságának meghatározására. A P(B|A) kifejezés a B esemény bekövetkezésének valószinüségét jelenti, ha A esemény már bekövetkezett (B|A, olvasd B feltétel A)

Igy két (vagy több) egymástól függő esemény esetén, azt a valószinüséget, amely figyelembe veszi egy meghatározott esemény bekövetkezésének tényét feltételes valószinüségnek nevezzük.

Ha A és B két egymástól függő esemény, együttes bekövetkezésük valószinüsége a következőképpen számolható. Az A bekövetkezésének valószinüségét szorozzuk B feltétel A (B-nek az A feltétel bekövetkezéséhez kötött) valószinüségével. Jelöléssel: P(AB) = = P(A) · P( )

a) P(B|A)

b) P(A|B)

A kifejezés helyesen:

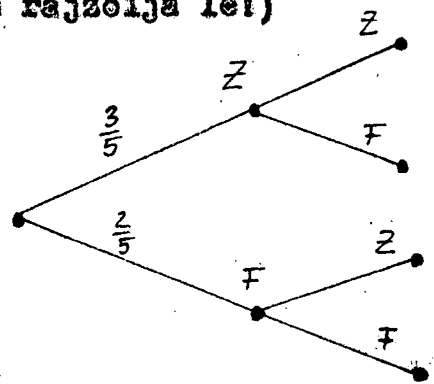
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Tegyük fel például, hogy egy dobozban három zöld és két fekete golyó van. Használjuk Z-t a zöld, F-t pedig a fekete húzásának jelölésére, így

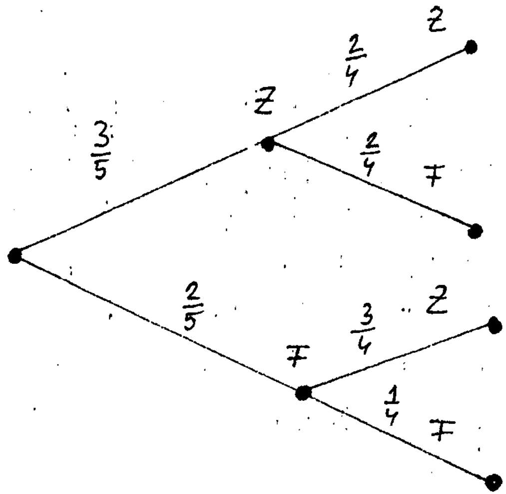
$$\begin{array}{lccc} P(Z) = & & \frac{3}{5}\,; & \frac{2}{5} \\ & a) & & b) \\ P(F) = & & \frac{2}{5}\,; & \frac{3}{5} \end{array}$$

$P(Z) = \frac{3}{5}$; $P(F) = \frac{2}{5}$

Nos, ha most huzunk a dobozból egy golyót, és utána nem tesszük azt vissza, akkor a második huzással kapcsolatos valószinüségek attól függenek, hogy az első huzás kimenetele hogyan alakult. Igy feltételes valószinüséggel állunk szemben. Irjuk be fagráf diagramunkba a második huzás hiányzó valószinüségértékeit, ha az első huzás zöld volt, és a golyót nem tettük vissza. (Külön papiron rajzolja le!)



6.ábra



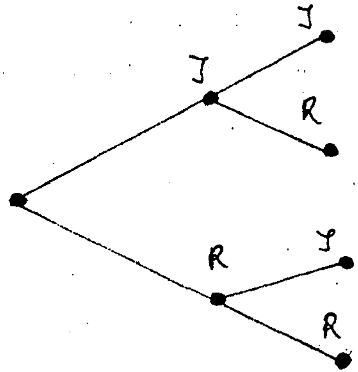
6.ábra

6.ábrán ábrázolt fekete golyó véletlen kiválasztásának valószinüségét zöld golyó előzetes kihuzásának feltétele mellett, jelölhetjük a következő jelöléssel $P(F|Z)$ és ebben az esetben a valószinüség értéke:

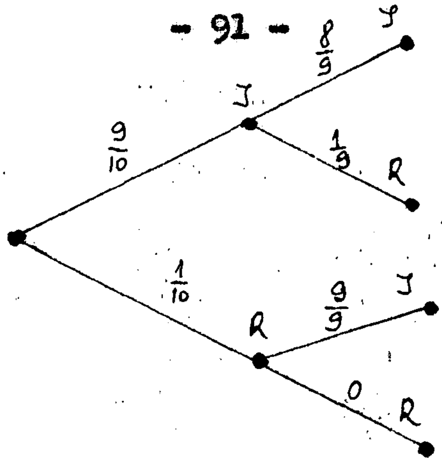
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$

Tételezzük fel, hogy egy tiz motorból álló szállitmányból egy motor hibás. Ha a tiz motorból egyet véletlenszerüen kiválasztunk, és megvizsgálunk, milyen valószinüséggel tapasztalhatjuk, hogy a motor jó (jelöljük J-vel), illetve, hogy a motor rossz (jelöljük R-rel)? Ábrázoljuk problémánkat fagráf diagramban! (Külön papiron rajzolja fel!)

A szállítmányból két motor megvizsgálását tervezzük, természetesen visszatevés nélkül, hiszen nem akarjuk ugyanazt a motort kétszer megvizsgálni. Irjuk be a megfelelő valószinüség értékeket a problémát ábrázoló fagráf diagramba!



7.ábra



7.ábra

<u>Összegezve:</u>

Algebrai formában, két esemény együttes bekövetkezésének szorzási szabálya a következő, ha az események függetlenek: 1. .... feltételes események esetén 2......

a) $P(AB) = P(A)P(B)$

b) $P(AB) = P(A)P(B|A)$

(Az 1.pontra adandó válasz szerint jelezzen.)

Független események: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Feltételes események: $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$

Független eseményekre alkalmazható szorzási szabály ugy értékelhető, mint a feltételes események szorzási szabályának speciális esete, mivel a feltételes bekövetkezés valószinüsége független események esetén egyenlő az esemény bekövetkezésének valószinüségével.

Igy $P(B|A)$ egyenlő 0 -val.

A P(B|A) formában felirt valószinüséget feltételes valószinüségnek nevozzük. A diagramot, amelyet speciálisan alkalmazunk egy vagy több egymás után bekövetkező esemény ábrázolására, legyenek azok függetlenek vagy feltételesek, fagráf diagrammak nevozzük.

SZUBJEKTIV VALÓSZINÜSÉG

Ebben a részben ismét visszatérünk a valószinüség értelmezésére s azt két nézőpontból vizsgáljuk meg. Az első, amelyet objektiv megközelitésnek nevezünk, a valószinüség értékét ugy értelmezi, mint egy meghatározott esemény bekövetkezésének eleve meghatározott gyakoriságát, azaz mint a dolgokhoz tartozó tulajdonságot. A második megközelités, amelyet szubjektiv megközelitésnek nevezünk, a valószinüség értékét ugy értelmezi, mint egy arra alkalmas személy becslését - a rendelkezésre álló információk alapján - egy meghatározott esemény bekövetkezési esélyére vonatkozóan. Ebben a részben bevezetjük és illusztráljuk a szubjektiv valószinüség lényegét, amely egyre fontosabb szerepet játszik a gazdasági döntések területén.

Ha például az $\frac{1}{2}$-es valószinüséget ugy interpretáljuk, hogyaz egy sorozatos pénzdobás fejdobásának relativ gyakorisága, akkor hallgatólagosan a valószinüségszámitás

a) objektiv

b) szubjektiv

megközelitését használjuk.

Tegyük fel, hogy egy beruházás határidőre való befejezésének valószinüsége 0,70 .

Lehet-e ezt az eseményt többször megfigyelni, hogy a bekövetkezés gyakoriságából megállapithassuk a valószinüség értékét?

a) igen
b) nem.

Igy, ha egyszeri eseményről van szó, és a kedvező lehetőség egyetlen kimenetel, a valószinüség értelmezésére a kimenetel várt gyakorisága, azaz az objektiv megközelités

a) használható

b) nem használható.

Igy ebben az esetben a valószinüségszámitás azon megközelitése látszik megfelelőnek, amely a valószinüség meghatározására egy alkalmas személy becslését használja fel. Ezt a megközelitési módot szubjektiv megközelitésnek nevezzük.

Térjünk vissza példánkra. Azt mondottuk, hogy egy meghatározott beruházás határidőre való befejezésének valószinüsége 0,70 . Tekinthetjük ezen valószinüséget ugy is, mint általában, sok megvalósitott beruházás esetén megfigyelt relativ gyakoriságot. Mégis, ha a beruházás speciális sajátosságait figyelembe vesszük, becslésünk jobban megközelitheti a valóságot, mint a megfigyelések alapján számitott érték. Igy ebben az esetben is, ha egy esemény természeténél fogva nem egyszeri, de mi csak egyszeri bekövetkezés valószinüségére vagyunk kiváncsiak, inkább a) becslést ; b) relativ gyakoriságot használunk.

A fenti esetben inkább becslést használunk.
Az előbbi megállapitásainkat finomithatjuk még a következővel. Tegyük fel, hogy a beruházás jelentősen előrehaladt, s bizonyos események bekövetkezése módositja előzetes elképzeléseinket. Igy a befejezési határidőt valószinübbé vagy valószinütlenebbé teheti. Ebben az esetben szoros kapcsolatba hozhatjuk a rendelkezésünkre álló információ mennyiségét a valószinüség érték becslésével.

Általánosságban is mondhatjuk, hogy a szubjektiv való-szinüség értéke függ a becslő személy rendelkezésére álló információ mennyiségétől. Természetesen függ más pl. pszichológiai tényezőktől (optimista, pesszimista beállitottság stb.) is.

Amig a vezetői döntések speciális helyzetekre vonatkoznak, nem pedig ismétlődő eseményekre, addig a gazdasági döntéselméletben a valószinüség értelmezésének szubjektiv megközelitése fontos szerepet játszik.

Térjünk vissza a bevezetőben említett példára:

Egy izzólámpa-tétel átvételéről kell dönteni. A tétel többezer darabból áll. Az átvételi előírás az izzólámpák átlagos élettartamát rögzíti, és az egyszerűség kedvéért a tételt csak ebből a szempontból kell tekinteni. Megfelelőnek minősül a tétel, ha az izzók átlagos élettartama legalább x_1, nem megfelelő a tétel, ha az átlagos élettartam x_1-nél kisebb.

A teljes tételt nem vizsgálhatjuk meg, hiszen az élettartam vizsgálat használhatatlanná teszi az izzókat. Igy kénytelenek vagyunk mindenképpen részleges információ alapján hozzárendelni a valószinüség értékeket.

A valószinüség értékek hozzárendelése történhet előzetes tapasztalat alapján. Ha az izzólámpákat szállitó cég már előzőleg több alkalommal szállitott, valamint az átvevő tájékozott a gyártás körülményeiről, előzetes tapasztalatai alapján képes valószinüség értékeket rendelni a tétel megfelelő vagy nem megfelelő voltához. A hozzárendelés azonban nem lehet önkényes, be kell tartanunk a valószinüségszámitás korábban megismert axiómáit.

A valószinüségszámitás korábban már tárgyalt axiómáit most röviden megismételjük:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Azaz a valószinüség számértéke a $[0,1]$ zárt intervallumban helyezkedik el.

2. $P(O) = 0 \quad P(I) = 1$

   A lehetetlen esemény (O) valószinüsége 0.
   A biztos esemény (I) valószinüsége 1.

3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ha $AB = 0$

   Két egymást kölcsönösen kizáró esemény (azaz egyidejüleg csak az egyik következhet be) vagylagos bekövetkezésének valószinüsége egyenlő a valószinüségek összegével.

Ezeket Kolmogorov-féle axiómáknak nevezzük.

Ha a fentiekben összefoglalt, egyébként teljesen ésszerü és egyszerü követelményeket kielégitjük, a valószinüség becslése szubjektiv megitélés alapján is történhet. Ebben az esetben végeredményben saját értékelő, számitásba vevő gondolkodó tudatunkból meritjük a meghatározott valószinüség értékeket. Későbbi információ természetesen módosithatja a valószinüség értékeket. amelynek egzakt számba vételére rendelkezésünkre álló matematikai eszköz a Bayes--féle következtetés (Bayes-tétel). Ennek részletes kifejtésére a következő tanulmányban kerül sor.

A mintavétel alapján történő valószinüség érték hozzárendelésre kidolgozott matematikai statisztikai módszerek állnak rendelkezésre. Ezeket a jelenlegi példában, és számos más esetben hasznosan lehet alkalmazni. De pl. ha csupán egy óra áll rendelkezésre az átvétel lebonyolitására, a mintavételes vizsgálat lebonyolitására nincs időnk. Hasonló helyzet a gyakorlatban sokszor fordul elő.

Természetesen, ha a feltételek megengedik, akkor járunk el leghelyesebben, ha a harmadik alternativát választjuk, azaz személyes tapasztalatunkat a mintavételes módszer eredményeivel ötvözzük, amelynek megvalósitására használható egzakt matematikai módszer szintén a már emlitett Bayes-tétel.

Bizonyos problémáknál (gyakorlatilag igen ritkán) elvileg lehetetséges teljes körü vizsgálat, azonban az esetek többségében a vizsgálatokat gazdaságtalan elvégezni, a kapott információ értéke nincs arányban az eszközölt ráforditással.

Az előzőekben érintőlegesen felvetett problémák megválaszolására ebben a tanulmányban nem kerülhet sor. A tanulmány célja a valószinüségfogalom kiépitése, és egyszerübb valószinüségszámitási szabályok ismertetése.

A valószinüség érték szubjektiv hozzárendelésére számos elméletileg megalapozott technikát dolgoztak ki, amelyet azonban más oktatási formában célszerü elsajátitani. Ennek előfeltétele azonban a jelen tanulmányunkban ismertetett alapgondolatok megértése. A valószinüségszámitás további, részletesebb megismerése csakis az alapgondolatok elsajátitására épülhet.

A valószinüségelmélet alapgondolataival való ismerkedésünk nem öncélu. Két alapvető szempontból igen hasznos. Alapgondolatai épitőkövekként használhatük fel a döntéselmélet megismeréséhez és a gazdasági kockázat fogalmának kialakitásához. A fenti ismeretek alkalmazása a modern gazdasági életben elengedhetetlen.

3. melléklet

Szüts István

A VALÓSZINÜSÉGELMÉLET ALAPGONDOLATAI

Lektorálta:

Dr.Kindler József

Budapest

1973

1. Ha öt egyforma korongot 1-től 5-ig megszámozunk és egy dobozban helyezünk el, s utána egy korong kihuzását tervezzük a 3-as korong kihuzásának valószinüsége:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ D

---

2. A következtetés során, amellyel meghatározta a 3-as korong kihuzásának $\frac{1}{5}$ -ös valószinüségét, Ön feltételezésekkel élt, és a valószinüségszámitás klasszikus megközelitésével egyező számitást alkalmazott. Az egyik feltételezés az volt, hogy az öt lehetséges esemény <u>kölcsönösen kizárja egymást</u>, ugyanis bármelyik korong kihuzása esetén csak

a) egy

b) több E

meghatározott esemény következhet be.

---

3. Igy feltételezésünknél fogva, azaz hogy a <u>lehetséges események kölcsönösen kizárják egymást</u>, egy huzás esetén két korong kihuzása

a) lehetséges C

b) nem lehetséges.

---

4. A másik feltételezés, amellyel élt, hogy az egyes változatok <u>egyaránt valószinüen következnek</u> be. Például hinné-e Ön, hogy a 3-as zseton kiválasztásának $\frac{1}{5}$ a valószinüsége, ha észrevette, hogy az fele akkora nagyságu, mint a többi?

a) igen B

b) nem.

A	B	C	D	E
	b) nem	b) nem lehetséges	c) $\frac{1}{5}$	a) egy

5. Végül Ön kiszámolt egy törtet, amely a valószinüség értéket reprezentálja, amelyben az összes lehetséges események száma lesz a

a) számláló   D

b) nevező

értéke, és a kedvező események száma lesz a

a) számláló

b) nevező   C

értéke.

---

6. Tegyük fel például, hogy az öt korongot a következőképpen számoztuk meg: 1, 1, 1, 3, 3. Ebben az esetben egy 3-as korong kihuzásának valószinüsége:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$ E

---

7. A két feltételezés, amelyet a valószinüséget mérő szám ($\frac{2}{5}$) meghatározásánál tettünk azaz, hogy az öt korong közül bármelyik kiválasztása is . . . .(A) . . . . események, és . . . . (B) egyenlő.

A	B	C	D	E
egymást kölcsönösen kizáró	bekövetkezési valószinüségük	a) számláló	b) nevező	c) $\frac{2}{5}$

8. Igy a fentiek alapján a valószinüséget mérő szám kiszámitásának egyik megközelitése a következő: Ha egy kisérletnek n egymást kölcsönösen kizáró és egyaránt valószinü kimenetele van, akkor egy x-el jelült kimenetel (esemény) valószinüségét a következő tört értéke határozza meg: $\frac{fx}{n}$, ahol fx az x esemény bekövetkezésének száma, n pedig az összes lehetséges kimenetel (esemény) száma. A valószinüség érték számitása megelőzi a kisérlet lefolytatását. Ez a valószinüségszámitás . . . . megközelitésének megállapitása. C

---

9. Ha egy pénzérmét feldobunk, akkor két, egymást kölcsönösen kizáró és egyaránt valószinü esemény következhet be: a pénzérme fej vagy irás oldalára eshet. A fejdobás valószinüségét a következő tört jellemzi: $\frac{fx}{n} = \ldots$

A

---

10. Ha egy kártyacsomagban 52 kártya van, akkor a pikk ász kihuzásának valószinüsége egy kártya választásával

$\frac{fx}{n} = \ldots\ldots\ldots$

B

---

11. Egy pikk lap kihuzásának valószinüsége egyszeri huzással:

$\frac{fx}{n} = \ldots\ldots$ B

A	B	C	D	E
$\frac{fx}{n} = \frac{1}{2}$	$\frac{fx}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$	klasszikus		$\frac{fx}{n} = \frac{1}{52}$

12. A valószinüségszámitás klasszikus megközelitése eleve meghatározott arányt tételez fel a kisérlet lehetséges kimenetelei között. Csak ezen feltételezés alapján lehetséges . . . . nélkül meghatározni az egyes valószinüségeket.

B

---

13. Számos döntési helyzetben azonban a gazdasági és kereskedelmi adatok következményeképpen, az alternativ események nem egyaránt valószinüek, sem a megfelelő valószinüségek előre nem ismertek. Ezek a tények korlátozzák tehát bonyolultabb esetekben a valószinüségszámitás . . . . megközelitésének használhatóságát.

E

---

14. A valószinüségszámitás másik megközelitése az események relativ gyakoriságának megfigyelésén alapul. Igy definició szerint: egy esemény (kimenetel) valószinüsége egyenlő nagyszámu kisérlet alapján megfigyelt bekövetkezésének . . . .

D

---

15. Tehát szembeállitva a klasszikus megközelitéssel, amely feltételezések alapján előre határozza meg a valószinüséget, a valószinüségszámitás relativ gyakoriság megközelitése a megismételt kisérlet . . . . alapul.

C

A	B	C	D	E
	a kisérlet megfigyelése	tényleges megfigyelésén	relativ gyakoriságával	klasszikus

16. A valószinüségszámitás relativ gyakoriság megközelitésének használata esetén, ha a kisérletek, illetve a megfigyelések számát növeljük, a megfigyelésekre alapozott valószinüség érték pontossága

a) nő
b) nem változik
c) csökken

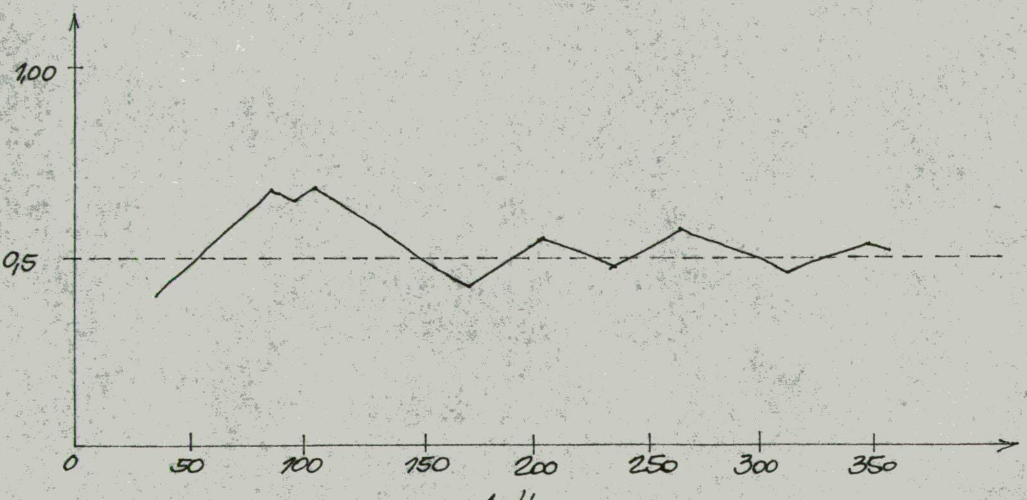
C

---

17. Ahogyan a megfigyelések száma növekszik, ugy válik egyre kisebbé a relativ gyakoriság ingadozása. Az 1. ábrán egy érme 300-szori feldobása alapján ábrázoltuk a fejdobások megfigyelt relativ gyakoriságát. Ahogyan nő a feldobások száma, ugy . . . . a relativ gyakoriság ingadozása, és közeliti meg a . . . . -es értéket.

B

E



1. ábra

A	B	C	D	E
	csökken	a) nő		0,5

18. Megjegyzés: azt állitottuk, hogy a relativ gyakoriság egyre jobban közeliti meg a 0,5 értéket a kisérletek számának növelésével. A valószinüségszámitás relativ gyakoriság definiciójával kapcsolatosan egy probléma a következő: a véges számu megfigyelés alapján számitott valószinüség értéket mindig pontosithatjuk további megfigyeléssel. Igy a valószinüség érték, amelyet a megfigyelt relativ gyakoriságra alapoztunk változatlanul

a) pontos

b) becsült

B

---

19. Másrészről viszont, ha nem tételezhetjük fel, hogy minden lehetséges esemény egyaránt valószinü, akkor a legfontosabb felhasználható módszer a valószinüség értékének számitása a . . . . meghatározása.

A

A	B	C	D	E
relativ gyakoriság	b) becsült			

2. A valószínűségszámítás alapjai.

Ebben a részben megismerjük a valószínűségszámítás jelölésrendszerét, valamint azt, hogy a valószínűség milyen számszerű értékeket vehet fel. Ezenkívül bevezetjük a Venn-diagramokat a kísérlet lehetséges kimeneteleinek, azaz eseményeknek az ábrázolására.

---

20. A valószínűség jelölésére a P betűt használjuk, zárójelbe téve annak az eseménynek a jelölését, amelyre vonatkozik. Így P(A) az . . . . esemény bekövetkezésének valószínűségét fejezi ki. D

---

21. Bármelyik megközelítésből is vizsgáljuk (klasszikus, relativ gyakoriság megközelítésből); mi a véleménye, mi az a legkisebb érték, amelyet a valószínűség számértéke felvehet. (Gondoljon a legkisebb lehetőség számértékére, amelyet a várt vagy megfigyelt relativ gyakoriság felvehet)?

a) 0,1

b) 10^{-10}

c) 0

C

A	B	C	D	E
		c) 0	A esemény	

22. A valószinüség 0 számértéke azt jelenti, hogy

a) lehetetlen

b) kicsi

c) nagy D

az esélye a kérdéses esemény bekövetkezésének.

Megjegyzés: Ha a valószinüség számértéke a relativ gyakoriság alapján való közelitésből származik, az inkább becslés, mint pontos számérték, igy a 0 számértékü valószinüség jelentheti, hogy az esemény bekövetkezése rendkivül valószinütlen, mindazonáltal nem szükségképpen lehetetlen.

---

23. Lehet-e a valószinüség számértéke negativ?

a) igen

b) nem. B

---

24. Mi a valószinüség lehetséges legnagyobb számértéke? (Vagy másként, mi a maximális értéke annak a törtnek, amely a várt, vagy megfigyelt relativ gyakoriságot képviseli?)

a) 0,999

b) 1,000

c) 1,001 C

Megjegyzés: Ismételten, ha a relativ gyakoriság megközelitést használtuk P értékének számitásakor, az 1-es valószinüség érték jelentheti, hogy ritka kivétel lehetséges, tehát a kérdéses esemény bekövetkezése jórészt, de nem szükségképpen teljesen biztos.

A	B	C	D	E
	b) nem	b) 1,000	a) lehetetlen	

25. Igy P lehetséges legkisebb értéke . . . . ., azt jelzi, hogy a kérdéses esemény bekövetkezése lehetetlen, biztos bekövetkezést jelez a valószinüség . . . . . -es értéke. A

---

26. Előfordulhat, hogy a valószinüség számértékét nem a megismert módon adják meg, hanem egy számarány segitségével. Igy pl. a 3:2 arány azt jelenti, hogy három kedvező eseménnyel . . . . . kedvezőtlen esemény jár együtt. C

---

27. Tehát, ha számarányt használunk a valószinüség megjelölésére, a lehetséges kimenetelek arányát a következő formában adjuk meg:

a) kedvező : kedvezőtlen
b) kedvezőtlen : kedvező
c) kedvező : összes B

---

28. Például kockajátékban 6-os dobásának valószinüsége számaránnyal jellemezve: . . . . E

---

29. Az előzőekhöz hasonlóan egy pénzérme fej dobásának valószinüsége, mellőzve az élre esés lehetőségét, ... számaránnyal jellemezhető. D

A	B	C	D	E
0 1	a) kedvező : kedvezőtlen	két	1 : 1	1 : 5

30. Míg a számarány a kedvező és kedvezőtlen események arányát mutatja, a valószinüség a kedvező és az összes kimenetelek arányát képviseli. Igy ha bármelyiket ismerjük a kettő közül, a másikat kiszámithatjuk. Számitsuk ki a kedvező kimenetel valószinüségét 1:5 számarány esetén! . . . . D

---

31. Hasonlóan, a 3:2 arány szerint meghatározott bekövetkezés kedvező eseményének valószinüsége . . . . . . , és a kedvezőtlen esemény valószinüsége . . . . . E

---

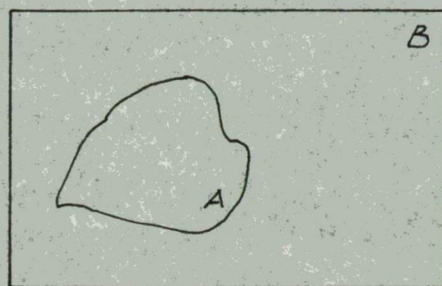
32. Ellenkező esetben, ha a kedvező esemény valószinüsége adott $\frac{1}{3}$, az események bekövetkezése jellemezhető az . . . . számaránnyal. C

---

33. Egy kisérlet kimeneteleit, azaz az eseményeket, valamint az igy keletkező valószinüségi helyzeteket szemléletesen ábrázolhatjuk Venn-diagramok segitségével. A Venn-diagramban körülhatárolt területeket feleltetünk meg az egyes eseményeknek. A Venn-diagram teljes területe egy kisérletre vonatkozóan az . . . . . . lehetséges kimenetelt (eseményt) ábrázolja. A

A	B	C	D	E
összes		1 : 2	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$

34. A 2.ábrán egy Venn-diagramot ábrázoltunk. A körülhatárolt terület A esemény bekövetkezését reprezentálja, a terület nagysága azonban nem szükségképpen jellemzi A esemény bekövetkezésének valószinüségét. Az A esemény nem bekövetkezését a diagramban . . . . terület reprezentálja.



2.ábra Venn-diagram

B

---

35. A Venn-diagram teljes területét teljes eseménytérnek nevezzük és E-vel jelöljük. Ha az A területen belül kijelölünk egy pontot, ez azt jelenti, hogy A esemény . . . . , ha a területen kivül az azt jelenti, hogy A esemény . . . . , azaz $\bar{A}$ esemény (olvasd: nem A, non A) következett be. D

---

36. P(A) jelenti A esemény bekövetkezésének . . . . . . , $P(\bar{A})$ pedig . . . . bekövetkezésének valószinüségét. C

A	B	C	D	E
	a bekeri-tetten (A-n) kivü-li	valószi-nüségét	bekövetke-zett	
		non A	nem követ-kezett be	

37. Ha egy pénzérme feldobása esetén A esemény jelenti a fejdobást, akkor $\bar{A}$ esemény . . . . jelenti. Esetünkben mivel csak két kimenetel lehetséges $\bar{A}$ egyuttal az írásdobást is jelenti. D

---

38. Az előzőeknek megfelelően $P(A)$ . . . . valószinűségét jelenti, $P(\bar{A})$ pedig . . . . valószinűségét jelenti. B

---

39. Mivel csak két esemény lehetséges, vagy fejet vagy írást dobhatunk, $P(A) + P(\bar{A})$ = ... , ez másként azt is jelenti, hogy a két esemény közül egyik biztosan be fog következni egy pénzérme . . . . . . esetén. A

---

40. A pénzfeldobás esetében tehát két eseményből áll a teljes . . . . Egy kockadobás esetén a teljes eseménytér . . . . eseményből áll, mivel a kocka feldobása esetén összesen hat kimenetel lehetséges. C

A	B	C	D	E
$P(A)+P(\bar{A})=1$	a fejdobás	eseménytér	nem fejdobást	
feldobása	az írásdobás	hat		

41. A pénzfeldobás kimenetelei, vagy a kockadobás kimenetelei teljes eseményrendszert alkotnak. A teljes eseményrendszer definició szerint a következő. Ha egy kisérlet lehetséges kimenetelei egymást kölcsönösen kizárják, de valamelyikük biztosan bekövetkezik, akkor ezen kimenetelek teljes eseményrendszert alkotnak. Ebből következik, hogy a teljes eseményrendszert alkotó események valószinüségeinek összege . . . . . . -gyel egyenlő.
Jelöléssel felirva $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = ...$ B

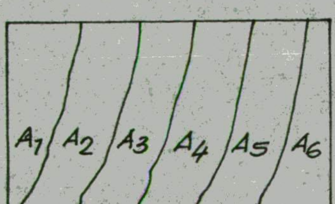
---

42. Ábrázoljuk egy kockadobás lehetséges hat kimenetelét Venn-diagramban! (Jelöljük a hat eseményt a következőképpen: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.) A

<u>Összegezve:</u>
43. Egy X-el jelölt esemény valószinüségét . . . . reprezentálja. A valószinüség legkisebb lehetséges számértéke . . . . , lehetséges legnagyobb számértéke C

---

44. Ha egy kedvező esemény jellemzésére a 4:5 számarányt használjuk, ez a következő valószinüségértéket jelenti: . . . . D

A	B	C	D	E
	egy	$P(X)$	$\frac{4}{9}$	
		0		
	1	1		

45. Az X-el jelölt esemény bekövetkezésének valószinüsége $P(X)$, a non X esemény bekövetkezésének valószinüsége . . . . , a kettő összege egyenlő . . . .
A teljes eseményrendszert alkotó események valószinüségeinek összege (jelöléssel . . . . .) szintén egyenlő 1-gyel.
C

---

46. Egy kockadobás esetén ezen események száma . . . ., tehát n = ... Részletesen felirva tehát

$$\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \qquad\qquad + P(A_6) = \ldots$$

B

A	B	C	D	E
	hat	$P(\overline{X})$		
	n = 6	1-gyel		
	$\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 1$	$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$		

3. Egy kisérlet egymást kölcsönösen kizáró és egymást kölcsönösen ki nem záró kimenetelei (eseményei)

Egy kisérlet esetén, ugymint egy kártyalap húzása egy kártyacsomagból, különféle kimenetelek (események) lehetségesek, ezek közül egyesek kölcsönösen kizárják egymást, mások nem. Két vagy több egymást kölcsönösen kizáró eseményről beszélünk, ha bármelyik esemény bekövetkezése automatikusan kizárja a többi esemény bekövetkezését. Ezen feltétel fennállása fogja meghatározni a következőkben ismertetendő valószinüségszámitási szabály alkalmazását.

---

47. Egy pénzérme feldobása esetén a fej vagy irás dobás egymást kölcsönösen . . . . esemény. C

---

48. Ha egy kártyacsomagból egy lapot huzunk, lehet-e az egyszerre ász és király? . . . . . Ebből következően ez a két lehetséges esemény. . . . . B

---

49. Az előzőhöz hasonló feltételek mellett, lehet-e a kártya egyszerre ász és pikk? . . . . . . Ez a két esemény tehát nem zárja ki kölcsönösen egymást. . D

A	B	C	D	E
	nem	kizáró	igen	
kölcsönösen kizárja egymást				

50. Ha A és B egymást kölcsönösen kizáró események, akkor A vagy B bekövetkezésének valószinüsége az egyes valószinüségek összege lesz. Jelöléssel:

P(A vagy B) = P(A+B) = P( ) + P( ) A

---

51. Ezzel az összeadási szabállyal összhangban egy fej vagy irás dobás valószinüsége egy pénzérme feldobása esetén (az élre esést kizárva vizsgálatainkból)

$P(F) + P(I) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$ 52 kártyalapból egy ász vagy egy király kihuzásának valószinüsége: C

---

52. Természetesen az összeadási szabály abban az esetben is alkalmazható, ha nem két, hanem több egymást kölcsönösen kizáró kimenetel létezik. Nézzük meg az 1.táblázat adatait.

A gyermekek száma	0	1	2	3	4	5 vagy több
A családok megoszlása	0,10	0,10	0,20	0,25	0,20	0,15

1.táblázat. A családok gyermekek száma szerinti megoszlása valamely országban.

Mi a valószinüsége, hogy egy családnak 5 vagy annál több gyereke van, ha ebből az országból véletlenül választunk ki egy családot?

D

A B C D E

$P(A + B) =$
$= P(A) + P(B)$

$\frac{4}{52} + \frac{4}{52} =$
$= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

0,15

53. Mi a valószinüsége annak, hogy találomra választva egy családot, annak 3 vagy annál több gyermeke lesz? (T.i. 3 vagy 4 vagy 5 vagy több.) . . . . . D

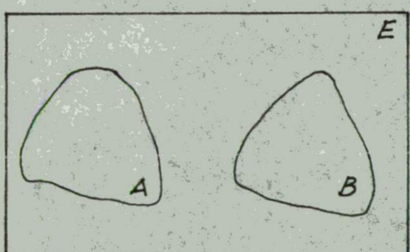
---

54. Ha A és B események egy kisérlet egymást kölcsönösen ki nem záró kimenetelei, akkor A vagy B bekövetkezésének valószinüségét a következőképpen számithatjuk. A bekövetkezésének valószinüségéhez hozzáadjuk B bekövetkezésének valószinüségét, s levonjuk az együttes bekövetkezés valószinüségét. Jelölve:

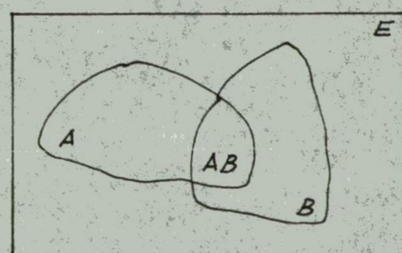
P(A vagy B) = P(A + B) =   − P(AB) A

---

55. Az együttes bekövetkezés levonásának racionalitása leginkább Venn-diagramon ábrázolható. A 3.a., illetve 3.b. ábrák közül melyik reprezentálja a kölcsönösen kizáró kimeneteleket? . . . .



3.a. ábra



3.b. ábra

B

---

56. Nézzük a 3.b. ábrát. Ha az A esemény bekövetkezésének valószinüségéhez hozzáadjuk B esemény bekövetkezésének valószinüségét, akkor, hogy kiszámitsuk A vagy B bekövetkezésének valószinüségét, milyen értéket adunk össze valójában kétszer: A,B, AB (olvasd A és B). E

A	B	C	D	E
P(A+B) = P(A)+ +P(B)−P(AB)	3.a.		0,25+0,20+ +0,15 = 0,60	AB

57. Ebből adódóan az együttes bekövetkezés valószinüségének kivonása teszi helyessé az eredményt, amelyet két egymást kölcsönösen ki nem záró esemény esetén az átfedő terület szimbolizál. Igy az összefüggés mégegyszer: . . . . D

---

58. Az egymást kölcsönösen kizáró eseményekre vonatkozó összeadási szabály ugy tekinthető, mint az egymást kölcsönösen ki nem záró eseményekre vonatkozó összeadási szabály speciális esete. A Venn-diagramból is látható (3.a. ábra), hogy a speciális esetben nincs átfedő terület azaz P(AB) = ... E

---

59. Az összeadási szabály alkalmazásával számitsuk tehát ki, hogy mi a valószinüsége annak, hogy egy ász vagy egy pikk lapot huzunk egy 52 lapos kártyacsomagból?
. . . . B

A	B	C	D	E
	$\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}=$ $=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$		$P(A+B)=$ $=P(A)+P(B)-$ $-P(AB)$	$P(AB)=0$

4. Független események, feltételes esemény, feltételes valószinüség

Ha két vagy több kisérlet, jelenség időben és térben elhatárolt, ugymint két pénzérme feldobása vagy ugyanazon pénzérme egymásutáni kétszeri feldobása, akkor a kisérlet kimenetelei (események) lehetnek egymástól függetlenek, vagy függhetnek egymástól. Ha az események függetlenek egymástól, akkor a második (későbbi) esemény vagy események bekövetkezésének valószinüségei függetlenek a megelőző eseményektől. Ha az események függenek egymástól, akkor a későbbi esemény(ek) bekövetkezésének valószinüsége függ a megelőző esemény(ek) bekövetkezésétől. Ebben a részben független vagy egymástól függő feltételes eseményekre vonatkozó szorzási szabállyal ismerkedünk meg.

---

60. Nézzük meg azt az esetet, ha egy pénzérmét egymásután kétszer feldobunk. Befolyásolja-e a második dobás kimeneteleinek valószinüségét az, hogy az első dobás fejdobás v volt?

a) igen

b) nem

D

---

61. Igy a pénzérme kétszeri feldobása olyan eseményeket reprezentál, amelyek . . . . egymástól. C

A	B	C	D	E
		függetlenek	b) nem	

62. A szorzási szabály azt állitja, hogy ha A és B két független esemény, az együttes bekövetkezés valószinüségét megkapjuk, ha a két esemény bekövetkezésének valószinüségét összeszorozzuk. Algebrai egyenlőséggel kifejezve a szabályt P(AB) = P( ) . P( ) C

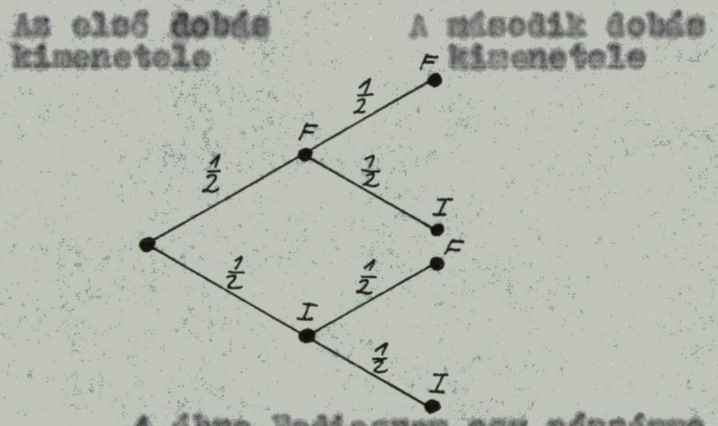
---

63. Igy két írásdobás valószinüsége két egymásutáni dobással . . . . . . D

---

64. Az egymásután bekövetkező, vagy párhuzamosan lezajló események szemléletes ábrázolására használhatók a fagráf diagramok. A 4.ábrán a fagráf diagram ábrázolja egy pénzérme egymásután kétszeri feldobását. Bármilyen meghatározott esemény bekövetkezésének valószinüségét ugy számithatjuk, hogy az első kimenetel valószinüségét szorozzuk a második kimenetel valószinüségével, mint ahogyan az ábra mutatja. Számoljuk ki annak valószinüségét az ábra segitségével, hogy először irást, majd fejet dobunk!

. . . .



4.ábra Fadiagram egy pénzérme egymásután kétszeri feldobásának ábrázolására.

A

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$		P(AB) = = P(A).P(B)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	

65. Az ábra segítségével számoljuk ki, mi a valószínűsége, hogy először fejet, majd írást dobunk? . . . . B

---

66. A 64. és 65. pontokat figyelembe véve, mi a valószínűsége egy fej és egy írás dobásának bármilyen sorrendben? . . . . . . D

---

67. A szerencsejátékok kimeneteleitől eltérően a gazdasági és kereskedelmi életben az események úgyszólván sohasem függetlenek egymástól. Ha két esemény nem független egymástól, akkor a feltételes valószínűség fogalmát használjuk egy meghatározott kimenetel gyakoriságának meghatározására. A P(B|A) kifejezés a B esemény bekövetkezésének valószínűségét jelenti, ha . . . . . esemény már bekövetkezett. (B|A, olvasd B feltétel A) C

---

68. Egy két (vagy több) egymástól függő esemény esetén, azt a valószínűséget, amely figyelembe veszi egy meghatározott esemény bekövetkezésének tényét . . . . valószínűségnek nevezzük. E

A	B	C	D	E
	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	A	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	feltételes

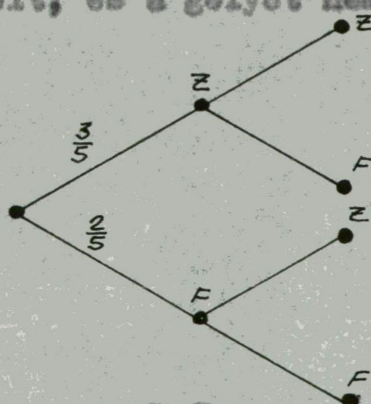
69. Ha A és B két egymástól függő esemény, együttes bekövetkezésük valószinűsége a következőképpen számolható. Az A bekövetkezésének valószinűségét szorozzuk B feltétel A (B-nek az A feltétel bekövetkezéséhez kötött) valószinűségével. Jelöléssel:
P(AB) = P(A) . P( ) B

---

70. Tegyük fel, például, hogy egy dobozban három zöld és két fekete golyó van. Használjuk Z-t a zöld, F-et pedig a fekete huzásának jelölésére, igy P(Z) = ..., P(F) = ... D

---

71. Nos, ha most huzunk a dobozból egy golyót, és utána nem tesszük azt vissza, akkor a második huzással kapcsolatos valószinűségek attól függenek, hogy az első huzás kimenetele hogyan alakult. Igy feltételes valószinűséggel állunk szemben. Irjuk be fagráf diagramunkba a második huzás hiányzó valószinűségértékeit, ha az első huzás zöld volt, és a golyót nem tettük vissza.



5.ábra

C

A	B	C	D	E
	$P(AB) = P(A) \cdot P(B\|A)$		$P(Z) = \frac{3}{5}$ $P(F) = \frac{2}{5}$	

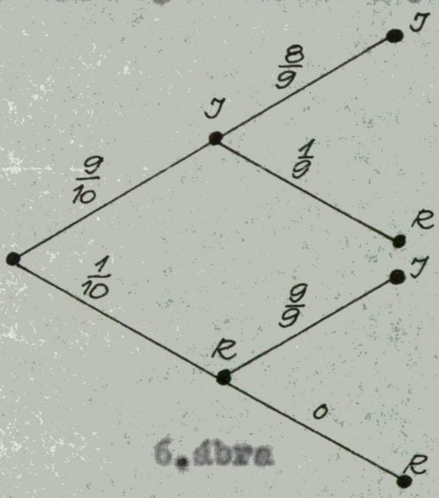
72. 5.ábrán ábrázolt fekete golyó véletlen kiválasztásának valószinüségét zöld golyó előzetes kihuzásának feltétele mellett, jelölhetjük a következő jelöléssel P( ) és ebben az esetben a valószinüség értéke . . . . . . B

---

73. Tételezzük fel, hogy egy tiz mtorból álló szállitmányból egy motor hibás. Ha a tiz motorból egyet véletlenszerüen kiválasztunk, és megvizsgálunk, milyen valószinüséggel tapasztalhatjuk, hogy a motor jó (jelöljük J-vel), illetve, hogy a motor rossz (jelöljük R-rel)? Ábrázoljuk problémánkat fa diagramban! C

---

74. A szállitmányból két motor megvizsgálását tervezzük, természetesen visszatevés nélkül, hiszen nem akarjuk ugyanazt a motort kétszer megvizsgálni. Irjuk be a megfelelő valószinüségértékeket a problémát ábrázoló fa diagramba!



6.ábra

A

A	B	C	D	E
	P(F|Z)			
	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$			

75. Az 5. ábra segitségével állapitsuk meg, hogy mi a valószinüsége annak, hogy vizsgálatunk folyamán mindkét motort hibátlannak találjuk? C

Összegezve:

76. Algebrai formában, két esemény együttes bekövetkezésének szorzási szabálya a következő, ha az események függetlenek: . . . . ; feltételes események esetén . . . . D

---

77. Független eseményekre alkalmazható szorzási szabály ugy értékelhető, mint a feltételes események szorzási szabályának speciális esete, mivel a feltételes bekövetkezés valószinüsége független események esetén egyenlő az esemény bekövetkezésének valószinüségével. Igy $P(B|A)$ egyenlő . . . . -vel. E

---

78. A $P(B|A)$ formában felirt valószinüséget . . . . . valószinüségnek nevezzük. A

---

79. A diagramot, amelyet speciálisan alkalmazunk egy vagy több egymás után bekövetkező esemény ábrázolására, legyenek azok függetlenek vagy feltételesek . . . . nevezzük. B

A	B	C	D	E
feltételes	fagráf diagramnak	$\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}$	$P(AB) = P(A)P(B)$ $P(AB)=P(A)P(B\|A)$	$P(B)$

5. melléklet

Szabó Gábor - Szüts István

GONDBAN A SZERVIZ, SEGIT AZ R 10
Programozott tanulmány

Budapest
1975

(OO

GONDBAN A SZERVIZ, SEGIT AZ RIO

Az elméleti jegyzet 6. füzetében megismerkedtünk a statisztikai próbák fajtáival, alkalmazási feltételeikkel és a próba kiválasztás szempontjaival. A példatár összefoglaló 6.11 részében pedig a hipotézis vizsgálat menetét és az egyes próbák számitási összefüggéseit ismerhettük meg.

Ezen ismeretek birtokában vizsgálja meg a Heis cég alábbi esetét, és adjon szakmai tanácsot a Központi Minősitő Szerv FŐNÖK-ének!

Adott tipusu hőmérsékletszabályozók egyik fontos paramétere a kapcsolási pontosság, amelynek előirása a Thermo '72 terméknél: 120 ± 3 C°. A Heis cég egy-egy tétel átadását mintavételes alapon laborjában ellenőrzi és minőségi bizonyitvánnyal látja el. Ismeretes az is, hogy e tételek nagybani vásárlója a Fermentor Á.G. a beérkező szabályozókat ugyancsak mintavételes alapon, saját müszereivel ellenőrzi.

Az utóbbi időben több tételnél a megrendelő SZERVIZ-e reklamációt jelentett be, igy a felek kérték a Központi Minősitő Szervet a vita eldöntésére. A Szerv FŐNÖK-e ugy döntött, hogy egy tételből véletlenszerüen kiválasztott szabályozókat saját embereivel részben a Heis, részben a Fermentor Á.G. SZERVIZ-ének minősitő müszerén bevizsgáltat. Az elvégzett mérések eredményei az alábbiak:

A Heis labor müszerén: $\bar{x}_H = 119{,}8$ C° $s_H = 1{,}54$ C° $n_H = 40$

a Fermentor Á.G. " $\bar{x}_F = 121{,}2$ C° $s_F = 1{,}17$ C° $n_F = 60$

Milyen javaslatot tenne, mint megbizott mérnök szakértő a FŐNÖK-nek az adatok alapján?

A) Elfogadja a tételt, mint megfelelőt és utasitja a Fermentor Á.G.-t - továbbiakban FÁG - mérőmüszerének hitelesitésére.

B) Elutasitja a tételt, mint nem megfelelőt és utasitja a Heis-t kötbér, vagy árengedmény adására vagy pótlólagos javitásra.

C) Mivel az eltérés gyakorlatilag jelentős, statisztikai próbával döntöm el, hogy a méréssorozatok eltérése szignifikáns-e, vagy valóban csak véletlen tényezők eredménye.

← A01.. ← B02.. ← C03.. ← J60

(01

A gondolatmenet helytelen, hiszen lehet, hogy a Heis müszere van rosszul hitelesitve, illetve a két mérés eltérése csak mintavételi véletlenből fakad.

← A01.. ← B02.. ← C03.. ← J60

(02

A gondolatmenet helytelen, hiszen lehet, hogy a FÁG müszere van rosszul hitelesitve, illetve a két mérés eltérése csak mintavételi véletlenből fakad.

← A01.. ← B02.. ← C03.. ← J60

(03

Helyes válasz, hiszen "ránézésre" nem szabad a kérdésben dönteni.

Milyen statisztikai próbát alkalmazna a probléma eldöntésére?

A) Gyors statisztikai próbát, hiszen elegendő egy közelitő eljárás is.
B) Paraméteres próbát.
C) Nemparaméteres próbát, hiszen nem ismerem a sokaság szükséges jellemzőit (μ, σ).

← A04.. ← B09.. ← C05.. ← J61

(04

Elvileg végezhetnénk ilyet, de ez nem lehet ilyen komoly döntés - csak egy gyors tájékozódás - alapja.

← A04.. ← B09.. ← C05.. ← J61

(05

Milyen nemparaméteres próbát lehet itt alkalmazni?

A) Wilcoxon-próbát.
B) Maximális F módszerét.
C) Kolmogorov-Szmirnov próbát.

← A08.. ← B06.. ← C07.. ← J62

(06
Helytelen válasz, mert a maximális F módszere azonos alapsokasági szórás megállapitására szolgál kettőnél több minta esetében, azonos mintaelemszámoknál.

← A08.. ← B06.. ← C07.. ← J62

(07
Ez illeszkedésvizsgálatra alkalmas! Itt nem jöhet szóba!

← A08.. ← B06.. ← C07.. ← J62

(08
Válasza helyes, de ehhez ismerni kellene az eredeti adatokat! Ekkor viszont már a sokaság paraméterére vonatkozó próba is felállitható, hiszen ismert az átlagok eloszlása. Tehát célszerübb egy paraméteres próba.

← J50

(09
Ez a helyes válasz, hiszen az egyes minták átlagainak eloszlása ismert, a mintaelemek függetlenek és a jellemzőt intervallum skálán mérjük.

← J59

(50
Milyen paraméteres próbát alkalmazhatunk ez esetben?
A) F próbát, mert ismertek a szórások.
B) A pározott adatok módszerét.
C) Valamelyik, két átlag összehasonlitására vonatkozó próbát.

← A11.. ← B10.. ← C12.. ← J63

(10

Elvileg lehetne, de csak egyedi adatokra, ezeket pedig itt nem ismerjük.

← A11.. ← B10.. ← C12.. ← J63

(11

Ez paraméteres próba, de itt a szabályozókra jellemző átlagos érték és nem a szórás érdekel bennünket.

← A11.. ← B10.. ← C12.. ← J63

(12

Ez a helyes felelet, hiszen a példa kapcsán az átlagok eltérése érdekel bennünket.

← J51

(51

Milyen átlagpróbát alkalmazunk?

A) t próbát, de előbb ellenőriznünk kell a szórások azonosságát.
B) egyszerü t próbát
C) u próbát

← A18.. ← B13.. ← C17.. ← J65

(13

Elvileg lehetséges.

Feltételezhető-e az ismeretlen szórások azonossága?

A) Igen, mert az eltérés ránézésre nem lényeges.
B) Igen, mert $s \approx \sigma$, igy u próba alkalmazható.
C) Nem, ezért ellenőriznünk kell ezt F-próbával. Ha az eltérés szignifikáns, akkor csak Aspin-Welsh próba alkalmazható.

← A14.. ← B15.. ← C16.. ← J64

(14

Ne döntsön, ha lehet - "ránézésre"!

← A14.. ← B15.. ← C16.. ← J64

(15

Ön nem konzekvens! Ha t próba, akkor nem lehet u !

$\leftarrow$ J51

(16

Nagyon helyes a válasza!

$\leftarrow$ J52

(17

Nem lehetséges, mert σ ismeretlen.

$\leftarrow$ A18.. $\leftarrow$ B13.. $\leftarrow$ C17.. $\leftarrow$ J65

(18

Ez a helyes válasz, hiszen, ha a szórások eltérése szignifikáns, Aspin-Welsh próbát kell alkalmazni!

$\leftarrow$ J52

(52

Tételezze fel, hogy ismert az F próba eredménye. $F_{sz} \cong 1,7$, a kritikus tartomány pedig $F_k > 1,59$. Hogyan dönt ezek alapján az alkalmazandó átlagpróbáról?

A) Mivel F_{sz} a kritikus tartományba esik, ezért sima t próbát alkalmazok.

B) Mivel F_{sz} nem esik a kritikus tartományba, így sima t próbát alkalmazok.

C) Mivel F_{sz} a kritikus tartományba esik, ezért Aspin-Welsh próbát alkalmazok.

$\leftarrow$ A19.. $\leftarrow$ B20.. $\leftarrow$ C21.. $\leftarrow$ J66

(19

Nem helyes, mert ekkor éppen nem lehetséges!

$\leftarrow$ A19.. $\leftarrow$ B20.. $\leftarrow$ C21.. $\leftarrow$ J66

(20

Nem helyes az állitás, mert F_{sz} a kritikus tartományba esik.

$\leftarrow$ A19.. $\leftarrow$ B20.. $\leftarrow$ C21.. $\leftarrow$ J66

(21

Ez a helyes válasz, hiszen ez azt jelenti, hogy a szórások nem vehetők azonosnak.

Állitsa fel az átlagra vonatkozó Aspin-Welsh próba nullhipotézisét!

A) $\mu_H \neq \mu_F$

B) Mindegy, hogy $\mu_H \neq \mu_F$, vagy $\mu_H = \mu_F$

C) $\mu_H = \mu_F$, azaz az eltérés a két müszer méréseinek átlaga között csak véletlen.

← A22.. ← B26.. ← C24.. ← J67

(22

Ez hipotézis, de nem konkrét állitás. Vizsgálható-e próbával nem konkrét állitás?

A) Igen, csak tényleges adatokon alapuljon.

B) Nem, csak konkrét állitás.

← A25.. ← B23.. ← J68

(23

Ez a helyes válasz, csak egyenlőség lehet nullhipotézis: $\mu_H = \mu_F$

← J27

(24

Ez a helyes válasz, nullhipotézis csak konkrét állitás lehet.

← J27

(25

Nincs igaza, direkt módon csak konkrét állitás bizonyitható.

← A25.. ← B23.. ← J68

(26

Dehogy mindegy!

← A22.. ← B26.. ← C24.. ← J67

(27

Az adatok alapján a próba számitott értéke: $t_{sz} = -4,5$
Ha $\alpha = 0,05$ és $f = 72$ határozza meg a kritikus tartományt a t táblázat alapján!

A) $t_k < 1,99$ illetve $t_k > -1,99$

B) $t_k > 1,99$ illetve $t_k < -1,99$

C) $t_k > 0,67$ illetve $t_k < -0,67$

← A28.. ← B30.. ← C29.. ← J69

(28

Az érték helyes, de a tartomány nem.

← A28.. ← B30.. ← C29.. ← J69

(29

Ez $\alpha = 0,5$-höz tartozik. Több figyelmet kérek!

← A28.. ← B30.. ← C29.. ← J69

(30

Ez a helyes válasz.

Hogyan dönt a fentiek alapján a nullhipotézisről?

A) A t_{sz} nem esik a kritikus tartományba, ezért a nullhipotézis igaz.

B) A t_{sz} a kritikus tartományba esik, igy a nullhipotézis igaz.

C) A t_{sz} a kritikus tartományba esik, igy a nullhipotézist elutasitom.

← A31.. ← B32.. ← C36.. ← J70

(31

Az állitás rossz, igy a következtetés is helytelen.

← A31.. ← B32.. ← C36.. ← J70

(32

Az állitás jó, de a következtetést gondolja meg.

Mit jelent, hogy a t_{sz} a kritikus tartományba esik?

A) Az átlagok eltérése nagyobb a megengedettnél. Tehát nem véletlen.

B) Az átlagok eltérése kisebb a megengedettnél, tehát véletlen.
C) Az átlagok eltérése nagyobb a megengedettnél, tehát véletlen.

← A35.. ← B34.. ← C33.. ← J71

(33
Az állitás helyes, azonban az eltérés ebből következően nem tekinthető véletlennek.

← A35.. ← B34.. ← C33.. ← J71

(34
A válasz helytelen.

← A35.. ← B34.. ← C33.. ← J71

(35
A válasz helyes, azonban nem konzekvens az előző kérdésre adott válasszal. Jobban ügyeljen a megfogalmazásokra!

← J37

(36
Ez a helyes válasz, hiszen $-4,5 < -1,99$.

← J37

(37
Fogalmazza meg a szakmai következtetést!
A) A két méréssorozat átlagainak eltérése véletlen okok következménye, mivel nincs szignifikáns eltérés.
B) A két méréssorozat átlagainak eltérése szignifikáns, tehát valamilyen szisztematikus hiba okoz különbséget.
C) A két méréssorozat átlagainak eltérése véletlen okok következménye, mivel az eltérés szignifikáns.

← A38.. ← B40.. ← C39.. ← J72

(38
Van szignifikáns eltérés, hiszen a nullhipotézis nem igaz.

← A38.. ← B40.. ← C39.. ← J72

(39
Ha szignifikáns az eltérés, akkor hogyan lehetne véletlen?

← A38.. ← B40.. ← C39.. ← J72

(40

Ez a helyes következtetés.

Adjon ezek alapján tanácsot a FŐNÖK-nek!

A) A Heis a hibás, mindent ő fizessen.

B) A FÁG a hibás, mindent ő fizessen.

C) Az eltérést valamilyen szisztematikus hiba okozza. Ezért először mindkét müszert ujra hitelesittetni kell.

← A41..← B42.. ← C43.. ← J73

(41

No, és ha a FÁG müszere van rosszul kalibrálva, és ezt a Legfelsőbb Központi Minősitő Szerv megállapitja, hová megy ön dolgozni?

← A41.. ← B42.. ← C43.. ← J73

(42

No, és ha a Heis müszere van rosszul kalibrálva, amit a FÁG a Legfelsőbb Központi Minősitő Szerv révén igazol! Ön visszaadja a diplomáját?

← A41.. ← B42.. ← C43.. ← J72

(43

Helyesen válaszolt. Ezen tulmenően, mivel ez nagy valószinüséggel igaz, Ön még egy hitelesitési megbizást is szerzett a Központi Szervnek, amiért a FŐNÖK-től prémiumot is kaphat.

Véleménye szerint segitett-e Önnek ebben a kérdésben a statisztikai következtetés módszere?

A) Igen, de ez a matematikusok dolga nem a mérnököké.

B) Nem, mert ránézésre is, mint szakember ugyanezt döntöttem volna.

C) Igen, mert egzakt alapra helyeztem a döntéselőkészitést, és a döntést.

← A44.. ← B45.. ← C46.. ← J74

(44

Sajnos létezik ilyen felfogás, pedig a problémák tartalma mindig müszaki, ezért célszerü egy mérnöknek is a statisztikai módszerek alapjait ismerni.

← A44.. ← B45.. ← C46.. ← J74

(45

Utólag könnyü okosnak lenni, de jobb ha ezt megelőzően is már okosak vagyunk. Sajnos sok "ránézésre" döntés születik még a gyakorlatban.

← A44..← B45..← C46.. ← J74

(46

Bár minden döntnök igy gondolkozna, s igy a helytelen döntések, döntéselőkészitések miatti veszteségek sokkal kisebbek lehetnének.

(60

Kérem, válasszon a megadott feleletek közül!

← A01.. ← B02.. ← C03.. ← J60

(61

Kérem, válasszon a megadott feleletek közül!

← A04.. ← B09.. ← C05.. ← J61

(62

Téves!

← A08.. ← B09.. ← C07.. ← J62

(63

Téves!

← A11.. ← B10.. ← C12.. ← J63

(64

Nem dolgozik figyelmesen!

← A14.. ← B15.. ← C16.. ← J64

(65
Nem dolgozik figyelmesen!

← A18.. ← B13.. ← C17.. ← J65

(66
Téves!

← A19.. ← B20.. ← C21.. ← J66

(67
Téves!

← A22 ← B26.. ← C24.. ← J67

(68
Téves!

← A25.. ← B23.. ← J68

(69
Téves!

← A28.. ← B30.. ← B29.. ← J69

(70
Téves!

← A31.. ← B32.. ← C36.. ← J70

(71
Téves!

← A35.. ← B34.. ← C33.. ← J71

(72
Téves!

← A38.. ← B40.. ← C39.. ← J72

(73
Téves!

← A41.. ← B42.. ← C43.. ← J73

(74
Téves!

← A44.. ← B45.. ← C46.. ← J74